# บทที่ 5

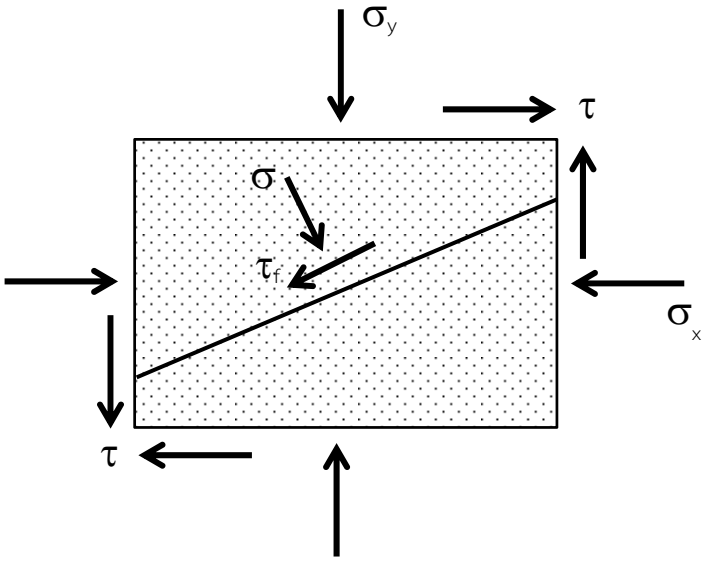
# กำลังรับแรงเฉือนของดิน

ความสามารถในการต้านทานการพังทลายของดินถูกกำหนดในรูปของค่ากำลังรับแรงเฉือนต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ กำลังรับแรงเฉือนของดินเป็นค่าพารามิเตอร์ในการวิเคราะห์ปัญหาเสถียรภาพของมวลดิน เช่น ความสามารถในการรับแรงแบกทาน (Bearing Capacity) เสถียรภาพของความลาด (Slope Stability) แรงดันดินด้านข้าง (Lateral Earth Pressure) เป็นต้น

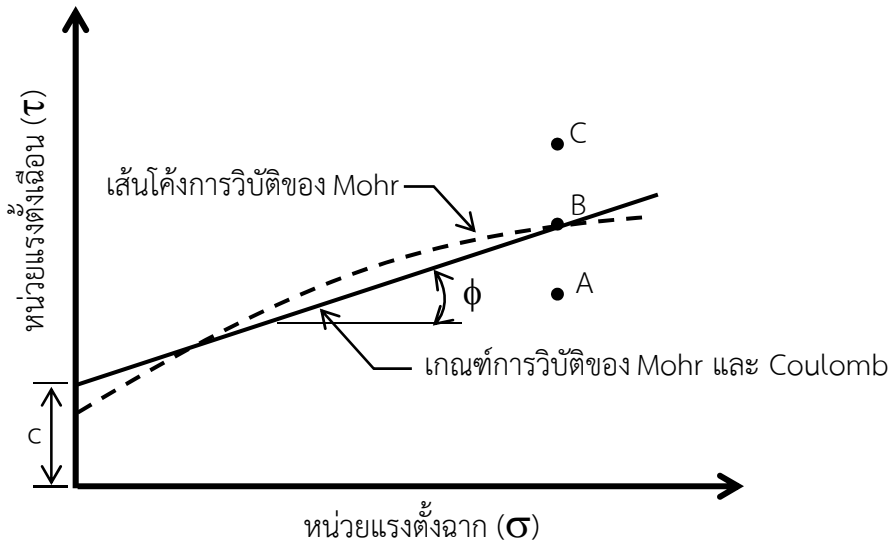
## 5.1 เกณฑ์การวิบัติของ Mohr และ Coulomb

ทฤษฎีการวิบัติของวัสดุที่นำเสนอโดย Mohr กล่าวว่า วัสดุต่างๆ วิบัติเนื่องจากการกระทำร่วมกันระหว่างหน่วยแรงตั้งฉาก (Normal Stress, $\sigma$) และหน่วยแรงเฉือน (Shear Stress, $\tau$) ดังแสดงในรูปที่ 5.1

ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนบนระนาบวิบัติสามารถแสดงได้ดังเส้นโค้งในรูปที่ 5.2 ในการประมาณค่าหน่วยแรงเฉือนบนระนาบวิบัติสามารถใช้ฟังก์ชันเชิงเส้นตรงของหน่วยแรงหลักในการหาค่าแทนได้ (Coulomb, 1776) ดังแสดงในสมการที่ 5.1 ซึ่งเรียกว่า เกณฑ์การวิบัติของ Mohr และ Coulomb (Mohr – Coulomb Failure Criteria)




**รูปที่ 5.1** หน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนบนระนาบวิบัติ




**รูปที่ 5.2** เกณฑ์การวิบัติของ Mohr และ Coulomb

$$\tau_f = c + \sigma \tan \phi \qquad (5.1)$$

โดยที่ $\tau_f$ = หน่วยแรงเฉือนบนระนาบวิบัติ

$\sigma$ = หน่วยแรงตั้งฉากบนระนาบวิบัติ

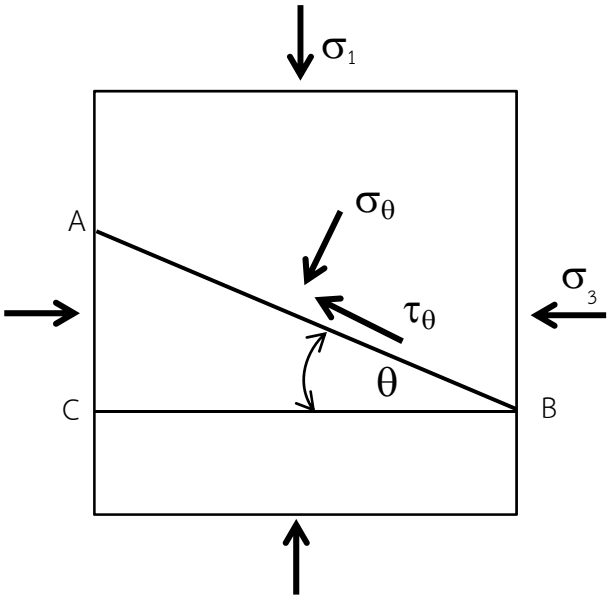
c = ค่าความเชื่อมแน่นของดิน

$\phi$ = ค่ามุมเสียดทานภายในของดิน

พิจารณารูปที่ 5.2 เมื่อพล็อตค่าหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นบนระนาบใดๆ แล้วจุดอยู่ใต้เส้นโค้งการวิบัติ (จุด A) แสดงว่าหน่วยแรงเฉือนวิบัติจะไม่เกิดขึ้นบนระนาบนั้นๆ กรณีที่จุดอยู่บนเส้นโค้งการวิบัติ (จุด B) แสดงว่าระนาบนั้นคือระนาบที่เกิดหน่วยแรงเฉือนวิบัติ สำหรับกรณีของจุด C ซึ่งอยู่เหนือเส้นโค้งการวิบัติจะไม่สามารถเกิดขึ้นได้เนื่องจากดินได้เกิดการวิบัติไปก่อนแล้วที่จุด B

## 5.2 หน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนบนระนาบเอียง

รูปที่ 5.3 แสดงมวลดินในระนาบ 2 มิติ โดยกำหนดให้หน่วยแรงตั้งฉากในแนวดิ่ง ($\sigma_1$) มีค่ามากกว่าหน่วยแรงตั้งฉากในแนวนอน ($\sigma_3$) ระนาบ AB คือระนาบที่เอียงทำมุม $\theta$ กับระนาบที่หน่วย




**รูปที่ 5.3** หน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนบนระนาบเอียง
กรณีมีเฉพาะหน่วยแรงตั้งฉากกระทำ

แรง $\sigma_1$ กระทำ โดยบนระนาบ AB จะมีหน่วยแรงตั้งฉาก $\sigma_\theta$ และหน่วยแรงเฉือน $\tau_\theta$ กระทำร่วมกันอยู่ หากกำหนดให้มวลดินมีความยาวด้านละ 1 หน่วยจะได้

$$AB = 1 / \cos\theta$$

$$AC = 1 \cdot \tan\theta$$

กำหนดให้ $F_n$ คือ แรงที่กระทำตั้งฉากบนระนาบ AB ซึ่งมีค่า

$$F_n = (\sigma_1 \times 1 \times 1) \cdot \cos\theta + (\sigma_3 \times 1 \times 1 \cdot \tan\theta) \cdot \sin\theta$$

$$= \sigma_1 \cdot \cos\theta + \sigma_3 \cdot \tan\theta \cdot \sin\theta$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหาค่า $F_s$ ซึ่งคือแรงกระทำเฉือนบนระนาบ AB ได้จาก

$$F_s = (\sigma_1 \times 1 \times 1) \cdot \sin\theta - (\sigma_3 \times 1 \times 1 \cdot \tan\theta) \cdot \cos\theta$$

$$= \sigma_1 \cdot \sin\theta - \sigma_3 \cdot \tan\theta \cdot \cos\theta$$

ดังนั้น หน่วยแรงตั้งฉากบนระนาบ AB จะสามารถหาได้จากสมการ

$$\sigma_\theta = F_n / AB$$

$$= (\sigma_1 \cdot \cos\theta + \sigma_3 \cdot \tan\theta \cdot \sin\theta) \cdot \cos\theta$$

$$= \sigma_1 \cdot \cos^2\theta + \sigma_3 \cdot \sin^2\theta$$

$$= \sigma_1 \cdot \cos^2\theta + \sigma_3 \cdot (1 - \cos^2\theta)$$

$$= \sigma_1 \cdot \cos^2\theta - \sigma_3 \cdot \cos^2\theta + \sigma_3$$

$$= (\sigma_1 - \sigma_3) \cdot \cos^2\theta + \sigma_3$$

$$= (\sigma_1 - \sigma_3) \cdot [(\cos 2\theta + 1) / 2] + \sigma_3$$

$$\sigma_\theta = (\sigma_1 + \sigma_3) / 2 + [(\sigma_1 - \sigma_3) \cdot \cos 2\theta] / 2 \qquad (5.2)$$

ในทำนองเดียวกันหน่วยแรงเฉือนบนระนาบ AB สามารถหาได้จากสมการ

$$\tau_\theta = F_s / AB$$

$$= (\sigma_1 \cdot \sin\theta - \sigma_3 \cdot \tan\theta \cdot \cos\theta) \cdot \cos\theta$$

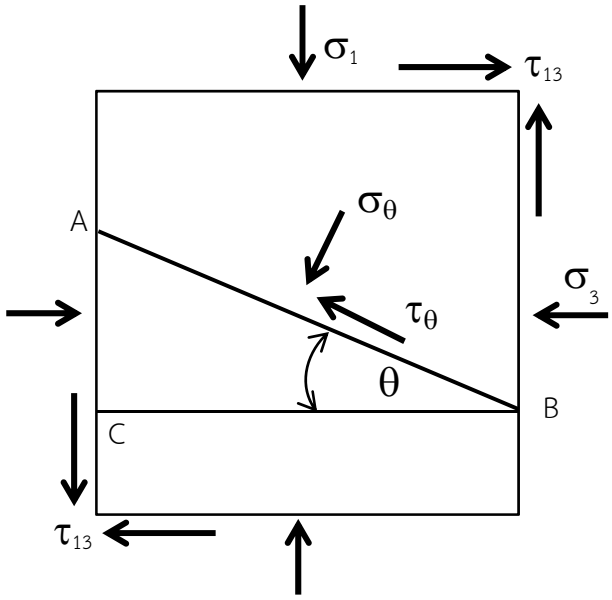
$$= \sigma_1 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta - \sigma_3 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta$$

$$= (\sigma_1 - \sigma_3) \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta$$

$$\tau_\theta = [(\sigma_1 - \sigma_3) \cdot \sin 2\theta] / 2 \qquad (5.3)$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ 5.2 และ 5.3 สามารถสรุปได้ดังนี้

1. ค่าหน่วยแรงตั้งฉากมากที่สุดจะเกิดขึ้นเมื่อ $\cos 2\theta$ มีค่าเท่ากับ 1 ซึ่งเท่ากับ $\cos 0^\circ$ ดังนั้นมุม $\theta$ มีค่าเท่ากับ $0^\circ$




**รูปที่ 5.4** หน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนบนระนาบเอียง
กรณีมีทั้งหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนกระทำ

2. ค่าหน่วยแรงเฉือนที่มากที่จะเกิดขึ้นได้เมื่อ sin $2\theta$ มีค่าเท่ากับ 1 ซึ่งเท่ากับ sin $90^{\circ}$ ดังนั้นมุม $2\theta$ มีค่าเท่ากับ $90^{\circ}$ หรือ $\theta$ มีค่า $45^{\circ}$ นั่นเอง

ในกรณีที่มวลดินมีหน่วยแรงเฉือนมากระทำร่วมด้วยดังแสดงในรูปที่ 5.4 ค่าหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนบนระนาบที่เอียง $\theta$ จากระนาบที่หน่วยแรง $\sigma_1$ กระทำสามารถหาได้จากสมการ

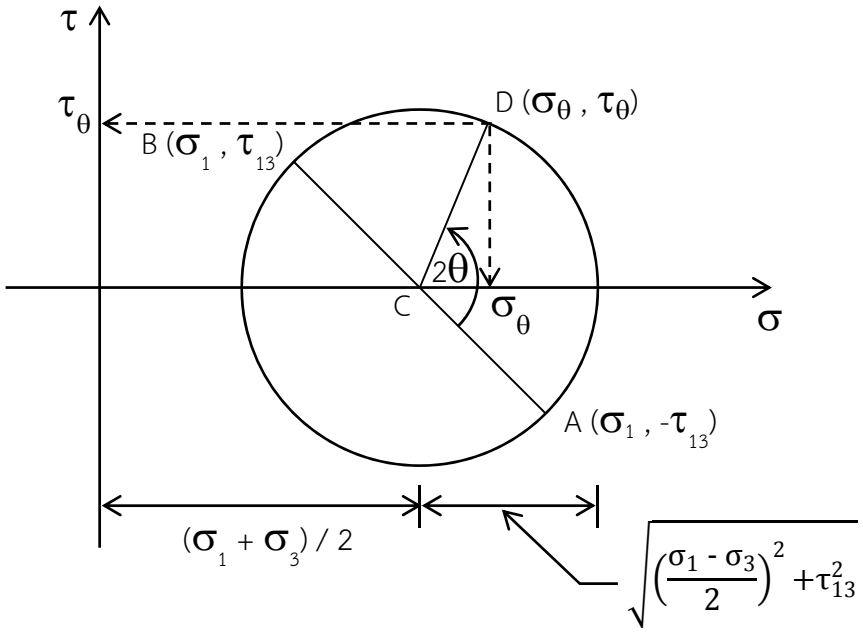
$$\sigma_\theta = (\sigma_1 + \sigma_3) / 2 + [(\sigma_1 + \sigma_3) \cdot \cos 2\theta] / 2 - \tau_{13} \cdot \sin 2\theta \qquad (5.2)$$

และ

$$\tau_\theta = [(\sigma_1 - \sigma_3) \cdot \sin 2\theta] / 2 - \tau_{13} \cdot \cos 2\theta \qquad (5.3)$$

**5.3 วงกลม Mohr (Mohr's Circle)**

วงกลม Mohr เป็นวิธีการหาค่าหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนบนระนาบต่างๆ โดยวิธีการวาดรูป โดยกำหนดให้แกนในแนวนอน (แกน x) เป็นค่าหน่วยแรงตั้งฉากและแกนดิ่ง (แกน y) เป็นค่าหน่วยแรงเฉือน ดังแสดงในรูปที่ 5.5 ดังนั้นจุดต่างๆ บนเส้นวงกลมจะเป็นค่าหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนบนระนาบต่างๆ




**รูปที่ 5.5** วงกลม Mohr

การกำหนดเครื่องหมายบวกลบสำหรับการวาดวงกลม Mohr จะกำหนดให้หน่วยแรงตั้งฉากที่เป็นหน่วยแรงอัดมีค่าเป็นบวกและหน่วยแรงเฉือนที่ทำให้วัตถุหมุนทวนเข็มนาฬิกามีค่าเป็นบวก สำหรับการวัดมุม $\theta$ จะมีค่าเป็นบวกในกรณีที่วัดมุมทวนเข็มนาฬิกา

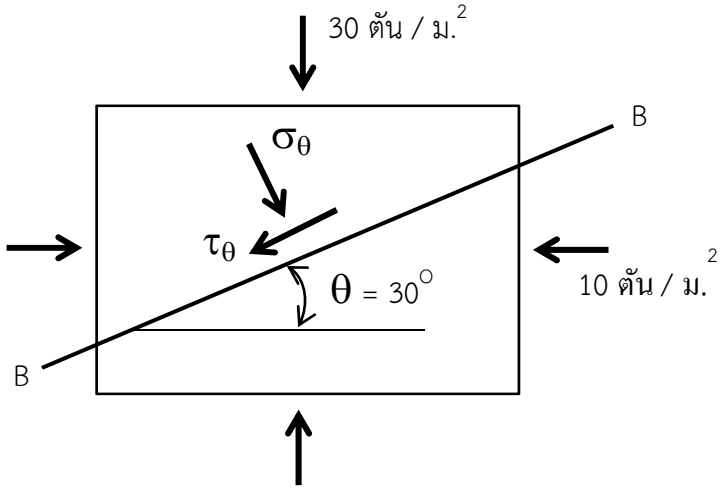
ขั้นตอนการวาดรูปวงกลม Mohr สามารถทำได้ดังนี้

1. กำหนดจุดหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนบนระนาบ 2 ระนาบ ในกรณีนี้กำหนดจุด A มีค่าพิกัด ($\sigma_1$ , $-\tau_{13}$) และจุด B มีค่าพิกัด ($\sigma_3$ , $\tau_{13}$)

2. ลากเส้นตรงเชื่อมต่อระหว่างจุด A และจุด B จะได้จุดตัดแกนนอนที่จุด C จากนั้นใช้จุด C เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ CA หรือ CB แล้ววาดวงกลม Mohr

3. หากต้องการทราบค่าหน่วยแรงที่ระนาบเอียงทำมุม $\theta$ ใดๆ กับระนาบ A ให้วัดมุมเป็นจากแนว CA เท่ากับ $2\theta$ จะได้จุด D ซึ่งสามารถอ่านค่าหน่วยแรงตั้งฉากจากแกนนอนและหน่วยแรงเฉือนจากแกนตั้ง

**ตัวอย่างที่ 5.1** มวลดินมีหน่วยแรงกระทำดังแสดงในรูปข้างล่าง จงหาค่าหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนบนระนาบ A – A โดยวาดวงกลม Mohr




**<u>วิธีทำ</u>**

1. กำหนดจุดหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนบนระนาบ 2 ระนาบ ในกรณีนี้กำหนดจุด A มีค่าพิกัด (30 , 0) และจุด B มีค่าพิกัด (10 , 0)

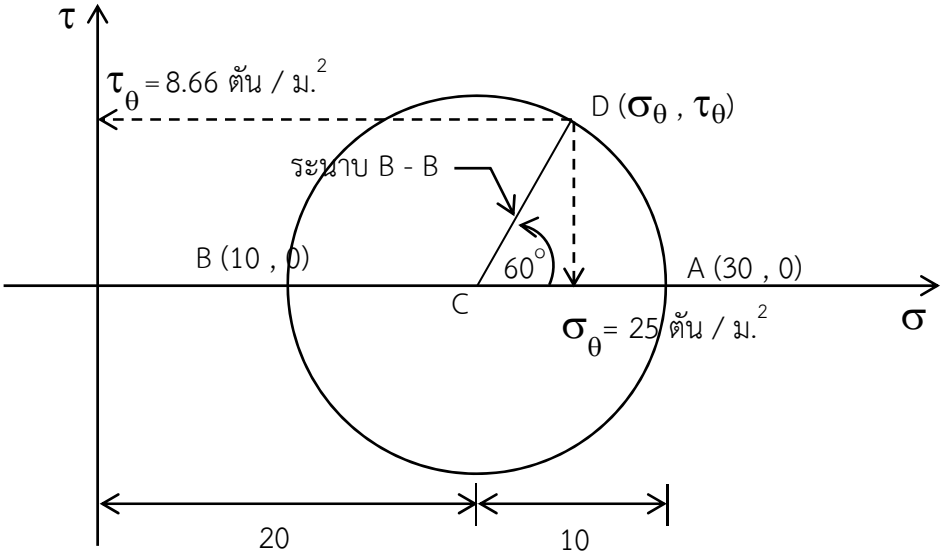
2. ลากเส้นตรงเชื่อมต่อระหว่างจุด A และจุด B จะได้จุดตัดแกนนอนที่จุด C จากนั้นใช้จุด C เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ $\sqrt{\left(\frac{30-10}{2}\right)^2 + 0^2}$ = 10 แล้ววาดวงกลม Mohr จะได้ดังรูป

3. วาดระนาบ B – B โดยวัดมุมจากระนาบที่หน่วยแรง 30 ตัน / ม.$^2$ กระทำไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม 60° ( 2 x 30°) แล้วอ่านหรือคำนวณค่าหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนจะได้

$\sigma_\theta$ = 20 + 10 · cos 60°

= 20 + (10) · (0.5)

$\sigma_\theta$ = 25 ตัน / ม.$^2$ **ตอบ**




$\tau_\theta$ = 10 · sin 60°

= (10) · (0.866)

$\tau_\theta$ = 8.66 ตัน / ม.$^2$ **ตอบ**