บทที่ 4
ลิมิตและความต่อเนื่อง

แคลคูลัส เป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่งที่มีพื้นฐานมาจากการศึกษาการเปลี่ยนแปลงและการเคลื่อนที่ทางกลศาสตร์ การสร้างรากฐานวิชาให้รัดกุมจำเป็นต้องอาศัยความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อน การพัฒนาความรู้จึงต้องละบริบททางวิทยาศาสตร์ที่ไม่จำเป็นออกไป เพื่อให้ได้ระบบภาษาสัญลักษณ์ที่มีความกระชับ ชัดเจน และสามารถขยายความรู้ต่อยอดออกไปเรื่อย ๆ ด้วยเหตุผลนี้ส่วนหนึ่งทำให้แคลคูลัสพัฒนาแยกตัวออกมาจากวิทยาศาสตร์และเข้าใกล้คณิตศาสตร์บริสุทธิ์มากขึ้น การพัฒนาแคลคูลัสในแง่มุมว่าเป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่งเริ่มเห็นชัดในคริสต์ศตวรรษที่ 17 จากผลงานของนิวตัน (Isaac Newton, 1643 – 1727, England) และไลบ์นิต (Gottfried Wilhelm van Leibniz, 1646 – 1716, Germany) แคลคูลัสเริ่มพัฒนาตัวเองไปสู่คณิตศาสตร์วิเคราะห์ที่ให้ระบบการให้เหตุผลที่มีความรัดกุมมากกว่าเดิม เมื่อ โคชี (Augustin Louis Cauchy, 1789 – 1857, France) ได้เสนอให้ใช้แนวคิดของลิมิตของฟังก์ชันเพื่อเป็นรากฐานความรู้ของแคลคูลัส เกิดการแสวงหาความรู้ต่อยอดต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และสะท้อนกลับนำไปใช้ประโยชน์ในการแสวงหาความรู้ทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ และแน่นอนว่ามนุษย์ยังแสวงหาวิทยาการเพื่อสร้างเทคโนโลยีตอบสนองความต้องการของตัวเองตลอดเวลา นั่นหมายถึงจะมีหลายปัญหาที่ยังแก้ไม่ได้ด้วยความรู้ที่มีในปัจจุบัน การแสวงหาความรู้ใหม่ ๆ จะย้อนกลับไปผลักดันให้แต่ละวิชาไม่หยุดที่จะพัฒนาความรู้ของตัวเอง แคลคูลัสก็เป็นหนึ่งแขนงวิชา ดังนั้นการทราบที่มาของการพัฒนาและความรู้พื้นฐานของแคลคูลัส จะทำให้เห็นแนวทางในการพัฒนาความรู้ต่อไป

รูปที่ 4.1 สามบุคคลที่มีส่วนสำคัญในการพัฒนาแนวคิดของแคลคูลัสยุคใหม่ [wikipedia.org]

สำหรับการศึกษาในบทนี้ ผู้สนใจจะได้ทำความเข้าในเนื้อหาของแคลคูลัสเบื้องต้น ประกอบด้วย ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน และการอินทิเกรต

4.1 ลิมิตและความต่อเนื่อง

นิยาม 4.1.1 (นิยามของลิมิต)

ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงเปิด ที่บรรจุ $x=a$ (ค่าของ $f(a)$ ไม่นิยาม) จำนวนจริง L จะเรียกว่าเป็นลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ ขณะที่ x เข้าใกล้ a ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon>0$ จะมีจำนวนจริง $\delta>0$ ซึ่งทำให้ $|f(x)-L|<\varepsilon$

นั่นคือ $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x\to a} f(x)=L$

ตัวอย่าง 4.1.1 จงใช้นิยามของลิมิต แสดงว่า $\lim_{x\to 3}(3x-2)=7$

วิธีทำ ให้ $\varepsilon>0$ เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ เลือก $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$ ที่ทำให้ $0<|x-3|<\delta$

แล้วจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
|f(x)-L| &= |(3x-2)-7| && <\varepsilon \\
&= |3x-9| && <\varepsilon \\
&= |3(x-3)| && <\varepsilon \\
&= 3|x-3| && <\varepsilon \\
&< 3\delta && <\varepsilon \\
&= \delta && <\frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $\lim_{x\to 3}(3x-2)=7$

□

ตัวอย่าง 4.1.2 จงใช้นิยามของลิมิตแสดงว่า $\lim_{x\to 2} x^2=4$

วิธีทำ เพื่อความสะดวก เราสมมติให้ $\delta=1$ ทำให้ได้ว่า $|x-2|<1$

ให้ $\varepsilon>0$ เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ

จะได้ว่า

$$|x^2-4|<\varepsilon$$

$$|x-2||x+2|<\varepsilon$$

$$\left|x-2\right|\left(x+2\right)<\varepsilon$$

เนื่องจากค่าสูงสุดของ x คือ 3 (ที่สมมติ) จะได้ว่า

$$5\left|x-2\right|<\varepsilon$$

$$\left|x-2\right|<\frac{\varepsilon}{5}$$

ดังนั้นสำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ เราสามารถเลือกจำนวน $\delta>0$ ซึ่ง

$$\delta=\left\{\frac{\varepsilon}{5},1\right\}$$

นั่นคือ $\lim_{x\to 2} x^2=4$

□

ทฤษฎีบท 4.1.1 (Uniqueness of Limit)

กำหนดฟังก์ชัน $f\left(x\right)$ และสมมติให้ $\lim_{x\to a} f\left(x\right)=L_1$ และ $\lim_{x\to a} f\left(x\right)=L_2$

จะได้ว่า $L_1=L_2$

(แสดงว่าลิมิตของฟังก์ชัน (ถ้ามี) จะมีได้เพียงค่าเดียวเท่านั้น)

ทฤษฎีบท 4.1.2

ถ้า c เป็นค่าคงที่ และกำหนดให้ $f\left(x\right)=c$ สำหรับทุก ๆ x

ดังนั้นสำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to a} f\left(x\right)=c$$

ทฤษฎีบท 4.1.3

ถ้ากำหนดให้ $f\left(x\right)=x$ สำหรับทุก ๆ x และ a ที่เป็นค่าคงที่ใด ๆ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to a} f\left(x\right)=a$$

ทฤษฎีบท 4.1.4 (ลิมิตของฟังก์ชันที่เท่ากัน)

สมมติให้มีจำนวน $h>0$ ซึ่งทำให้ $f(x)=g(x)$ สำหรับทุก ๆ x ที่ $0<|x-a|<h$ และสมมติให้ $\lim_{x\to a} g(x)=L$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

ทฤษฎีบท 4.1.5 (ลิมิตของผลบวก)

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมี $\lim_{x\to a} f(x)=L_1$ และ $\lim_{x\to a} g(x)=L_2$ จะได้

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=L_1+L_2$$

บทแทรก 4.1.6

ถ้า $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมี $\lim_{x\to a} f_1(x)=L_1$, $\lim_{x\to a} f_2(x)=L_2$, $\lim_{x\to a} f_3(x)=L_3, \ldots,$ $\lim_{x\to a} f_n(x)=L_n$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots+f_n(x)\right]=L_1+L_2+L_3+\cdots+L_n$$

ทฤษฎีบท 4.1.7 (ลิมิตของผลคูณ)

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมี $\lim_{x\to a} f(x)=L_1$ และ $\lim_{x\to a} g(x)=L_2$ จะได้

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=L_1\cdot L_2$$

บทแทรก 4.1.8

กำหนดฟังก์ชัน $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ ซึ่งมี $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = L_1,\ \lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L_2,$ $\lim\limits_{x \to a} f_3(x) = L_3, \ldots,\ \lim\limits_{x \to a} f_n(x) = L_n$ จะได้ว่า

$$\lim_{x \to a} \left[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) \right] = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot \ldots \cdot L_n$$

บทแทรก 4.1.9

ถ้า f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมี $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ และ k เป็นค่าคงที่ใด ๆ จะได้ว่า

$$\lim_{x \to a} kf(x) = k \cdot L$$

บทแทรก 4.1.10

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมี $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ และ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$ จะได้ว่า

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) - g(x) \right] = L_1 - L_2$$

ทฤษฎีบท 4.1.11

ถ้า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ และ $S_1 < L < S_2$ จะได้ว่าจะต้องมีจำนวนจริงบวก $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $S_1 < f(x) < S_2$ สำหรับทุก ๆ x ที่ $0 < |x - a| < \delta$

บทแทรก 4.1.12

ถ้า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ และ $L \neq 0$ จะได้ว่าจะต้องมีจำนวน $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $|f(x)| > \dfrac{|L|}{2}$ สำหรับทุก ๆ x ที่ $0 < |x - a| < \delta$

ทฤษฎีบท 4.1.13

ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = L$ โดยที่ $L \neq 0$ จะได้ว่า

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$$

บทแทรก 4.1.14

ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$ โดยที่ $L_2 \neq 0$ จะได้ว่า

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

ตัวอย่าง 4.1.3 จงหา $\lim_{x \to 3} \left(x^3 + 2x^2 + 5\right)$

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 3} \left(x^3 + 2x^2 + 5\right) &= \lim_{x \to 3} x^3 + 2 \lim_{x \to 3} x^2 + \lim_{x \to 3} 5 \\ &= 3^3 + 2\left(3^2\right) + 5 \\ &= 27 + 18 + 5 \\ &= 50\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 4.1.4 จงหา $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 + 2x^2 + 5}{3x + 1}$

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 3} \frac{x^3 + 2x^2 + 5}{3x + 1} &= \frac{\lim_{x \to 3} \left(x^3 + 2x^2 + 5\right)}{\lim_{x \to 3} (3x + 1)} \\ &= \frac{50}{10}\end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 4.1.15

ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = b$ และ $\lim_{x \to b} g(x) = L$ และถ้ามีจำนวนจริงบวก $c > 0$

ซึ่งทำให้ $f(t) \neq b$ สำหรับทุก ๆ t ที่ $|t - a| < c$ จะได้ว่า

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = L$$

ทฤษฎีบท 4.1.16

สมมติให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน a และ b เป็นจำนวนจริงที่หาค่า $g(b)$ ได้

และถ้า $\lim_{x \to b} g(x) = g(b)$ และ $\lim_{x \to a} f(x) = b$ จะได้ว่า

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = g(b)$$

ตัวอย่าง 4.1.5 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชัน โดยกำหนดว่า $f(x) = x^2, g(x) = 2x + 1$

ในที่นี้จะพบว่า $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ และ $\lim_{x \to 4} g(x) = 9 = g(4)$

ทั้งนี้เพราะ $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2 + 1$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = 9$

□

ทฤษฎีบท 4.1.17

สมมติให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน a และ b เป็นจำนวนจริงที่หาค่า $g(b)$ ได้

และถ้า $\lim_{x \to b} g(x) = g(b)$ และ $\lim_{x \to a} f(x) = b$ จะได้ว่า

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = g(b)$$

ทฤษฎีบท 4.1.18

ให้ f เป็นฟังก์ชัน เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ ก็ต่อเมื่อ ถ้า $V=(c,d)$ เป็นช่วงเปิดใด ๆ ที่มี $L\in V$ แล้วจะต้องมีช่วงเปิด $U=(r,s)$ ที่มี $a\in U$ และทำให้เมื่อไรก็ตามที่ $x\in U$ และ $x\neq a$ แล้วจะได้ว่า $f(x)\in V$

ทฤษฎีบท 4.1.19

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a>0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x} &= \sqrt[n]{\lim_{x\to a} x}\\ &=\sqrt[n]{a}\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 4.1.20

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $L>0$ และ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}=\sqrt[n]{L}$$

ตัวอย่าง 4.1.6 จงหา $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt{x+1}}$

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt{x+1}} &= \frac{\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{x^3+1}}{\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+1}}\\ &=\frac{\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3+1\right)}}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(x+1)}}\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{3}}$$

□

ตัวอย่าง 4.1.7 จงหา $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$

วิธีทำ จากโจทย์ จะเห็นว่าถ้าแทน $h=0$ จะทำให้ลิมิตนี้หาค่าไม่ได้

เราจะพิจารณาฟังก์ชัน $\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$ ว่าสามารถเปลี่ยนรูปอื่นได้หรือไม่

ซึ่งเราได้ว่า
$$\begin{aligned}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} &= \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}\\ &= \frac{2hx+h^2}{h}\\ &= \frac{h(2x+h)}{h}\\ &= 2x+h\end{aligned}$$

ดังนั้น เราก็จะได้ว่า $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$

นั่นคือ $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = 2x$

□

4.1.1 ลิมิตด้านเดียว (One-Side Limits)

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x)$ ที่กำหนดโดย $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & ;\ 1\le x\le 1 \\ \frac{1}{2}x^2-3 & ;\ 1<x<4 \end{cases}$

จะพบว่า ที่จุด $x=1$ จะได้ $f(1)=3$ แต่ $\lim_{x\to 1} f(x)$ ไม่มี ดังนั้น ฟังก์ชัน f จึงไม่ต่อเนื่องที่จุด $x=1$

ถ้าให้ $g(x)=2x+1$ และ $h(x)=\frac{1}{2}x^2-3$ และให้โดเมนของ g และ h คือเซตของจำนวนจริงทั้งหมด $(\mathbb{R})$ จะพบว่า $f(x)=g(x)$ สำหรับทุก ๆ $x\in[-1,1]$ เพราะฉะนั้นในขณะที่ x เข้าใกล้ 1 ทางด้านซ้ายมือ (หมายถึง x เข้าใกล้ 1 ทางด้านที่มีค่าน้อยกว่า 1) ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x\to 1^-$ จะได้ว่า $\lim_{x\to 1^-} f(x)=3=\lim_{x\to 1^-} g(x)$

ในทำนองเดียวกัน เพราะว่า $f(x)=h(x)$ สำหรับทุก ๆ $x\in(1,4)$ ในขณะที่ x เข้าใกล้ 1 ทางด้านที่มีค่ามากกว่า 1) ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x\to 1^+$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\frac{5}{2} = \lim_{x\to 1^+} h(x)$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$

นิยาม 4.1.3 ลิมิตขวามือ (Right-hand limit)

กำหนดฟังก์ชัน *f* และจำนวนจริง a, L เราจะกล่าวว่า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางด้านขวามือ (เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$) ถ้ามีสมบัติว่า สำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก $\varepsilon > 0$ จะต้องมีจำนวนจริงบวก $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $|f(x) - L| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ x ที่ $a < x < a + \delta$

นิยาม 4.1.4 ลิมิตทางซ้าย (Left-hand limit)

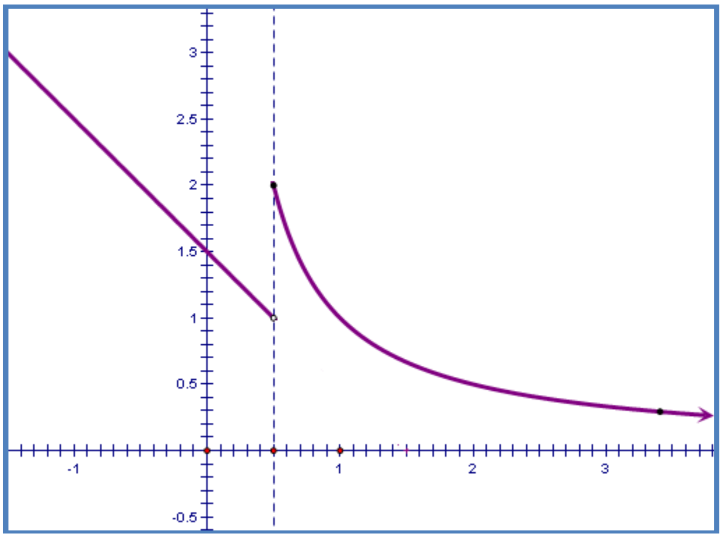
กำหนดฟังก์ชัน *f* และจำนวนจริง a, L เราจะกล่าวว่า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางด้านซ้ายมือ (เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$) ถ้ามีสมบัติว่า สำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก $\varepsilon > 0$ จะต้องมีจำนวนจริงบวก $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $|f(x) - L| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ x ที่ $a - \delta < x < a$

ตัวอย่าง 4.1.8 กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} -x + \frac{3}{2} & ; \ x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x} & ; \ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

จงหาค่าของ $\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x)$ และ $\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x)$

วิธีทำ จากโจทย์ สามารถเขียนกราฟ ของ $f(x)$ ได้ดังนี้



จะพบว่า f ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x=\frac{1}{2}$ ในขณะที่ x เข้าใกล้ $\frac{1}{2}$ ทางด้านซ้ายมือ

จะได้ว่า $f(x)$ เข้าใกล้ $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)=1$ ในขณะเดียวกัน จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)=2$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)$

□

ทฤษฎีบท 4.1.21

ถ้า f เป็นฟังก์ชัน และ a, L เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{x\to a^-} f(x)=L=\lim_{x\to a^+} f(x)$$

หมายเหตุ ในกรณีที่ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ เราจะกล่าวว่า $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ไม่มี

ตัวอย่าง 4.1.9 จงหา $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ โดยกำหนดให้

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+1 & ; \ x<0\\ \frac{1}{x+1} & ; \ x\geq 0\end{cases}$$

วิธีทำ เราได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{2}x+1\right)=1$

และ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\left(\frac{1}{x+1}\right)=1$

เนื่องจากเราพบว่า $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=1$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$

□

ตัวอย่างที่ 4.1.10 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{9-x^2}{\sqrt{3+2x-x^2}}$

วิธีทำ กำหนดให้ $f(x)=\frac{9-x^2}{\sqrt{3+2x-x^2}}=\frac{(3-x)(3+x)}{\sqrt{(1+x)(3-x)}}$

เพราะฉะนั้น สำหรับ x ที่ $-1<x<3$ จะได้ว่า

$$f(x)=\frac{\sqrt{3-x}\,(3+x)}{\sqrt{1+x}}$$

เพราะว่า $\lim\limits_{x\to 3^-}(3+x)=\lim\limits_{x\to 3^-}3+\lim\limits_{x\to 3^-}x=3+3=6$

$\lim\limits_{x\to 3^-}(1+x)=\lim\limits_{x\to 3^-}1+\lim\limits_{x\to 3^-}x=1+3=4$

$\lim\limits_{x\to 3^-}(3-x)=\lim\limits_{x\to 3^-}3-\lim\limits_{x\to 3^-}x=3-3=0$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{1+x}=\sqrt{4}=2$

และ $\lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{3-x}=\sqrt{0}=0$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{3-x}\,(3+x)}{\sqrt{1+x}}=\frac{6\cdot 0}{2}=0$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 0$

□

4.1.2 ความต่อเนื่อง (Continuity)

ตามที่ได้กล่าวมาแล้ว ถึงความหมายของ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ถึงแม้ในบางฟังก์ชันเราไม่สามารถหาค่าของฟังก์ชันนั้นๆ ที่จุด $x = a$ ก็ตาม แต่ในส่วนที่จะกล่าวต่อไปนี้เราจะพูดถึงแต่เฉพาะในกรณีที่ f เป็นฟังก์ชันซึ่งหาค่าของ $f(a)$ ได้ นอกจากนั้น $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ โดยที่ $L = f(a)$ ฟังก์ชัน f ที่มีลักษณะดังกล่าวเราเรียกว่าเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous Function) ที่จุด $x = a$

นิยาม 4.1.5

ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่จุด $x = a$ ก็ต่อเมื่อ

1) หาค่าของ $f(a)$ ได้
2) หาค่าของ $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ได้
3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

นิยาม 4.1.6

ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในเซต S ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ทุกจุดในเซต S

ตัวอย่าง 4.1.11 กำหนดให้ $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$ จงแสดงว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$ หรือไม่

วิธีทำ กำหนดให้ $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$ ถ้าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$ ฟังก์ชัน f จะต้องมีคุณสมบัติครบทั้ง 3 ข้อต่อไปนี้

1) $f(1) = 2(1)^2 + 3(1) - 4 = 2 + 3 - 4 = 1$

2) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left(2x^2 + 3x - 4\right)$
$= 2 + 3 - 4$
$= 1$

3) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 1$

จาก 1) - 3) สรุปได้ว่า ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$

□

นิยาม 4.1.7

เราจะเรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็นฟังก์ชันโพลิโนเมียล (Polynomial Function) ก็ต่อเมื่อ

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

โดยที่ $c_0, c_1, \cdots, c_n$ ทุกตัวเป็นจำนวนจริง

ทฤษฎีบท 4.1.22

ฟังก์ชันโพลิโนเมียลจะเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องในเซต $\mathbb{R}$
(โดยกำหนดว่า $\mathbb{R}$ เป็นเซตของจำนวนจริงทั้งหมด)

ทฤษฎีบท 4.1.23

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่จุด $x = a$ จะได้ว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้จะต่อเนื่องที่จุด $x = a$ เช่นกัน

1) $f + g$
2) $f \cdot g$
3) $\dfrac{f}{g}, g(a) \neq 0$
4) kf โดยที่ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ทฤษฎีบท 4.1.24

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a และ g เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่จุด $x = f(a)$ จะได้ว่า $g \circ f$ จะเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง ที่จุด $x = a$

นิยาม 4.1.8

เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องทางขวามือ (right-hand continuity) ที่จุด a ถ้า $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ และเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องทางซ้าย (left-hand continuity) ที่จุด b ถ้า $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

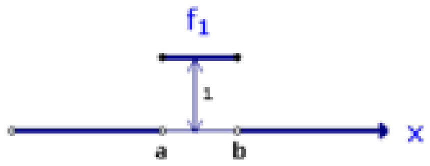
สมมติให้ $a<b$ และให้ f_1, f_2 เป็นฟังก์ชันโดยกำหนดว่า

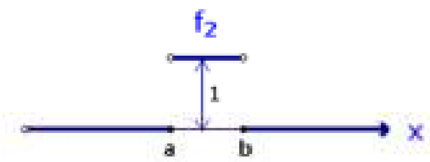
$$f_1(x)=\begin{cases}0 & , \ x<a \\ 1 & , \ a\leq x\leq b \\ 0 & , \ x>b\end{cases}$$

และ

$$f_2(x)=\begin{cases}0 & , \ x\leq a \\ 1 & , \ a<x<b \\ 0 & , \ x\geq b\end{cases}$$

ดังรูป





จะพบว่าฟังก์ชัน f_1 และ f_2 จะต่อเนื่องที่จุดทุกจุดยกเว้นที่จุด $x=a$ และ $x=b$ นอกจากนั้น f_1 จะต่อเนื่องทางขวามือที่จุด $x=a$ และต่อเนื่องทางซ้ายมือที่จุด $x=b$ ทั้งนี้เพราะ $\lim\limits_{x\to a^+} f_1(x)=1=f(a)$ และ $\lim\limits_{x\to b^-} f_1(x)=1=f(b)$ ในทำนองเดียวกัน f_2 จะต่อเนื่องทางซ้ายมือที่จุด $x=a$ และต่อเนื่องทางขวามือที่จุด $x=b$

นิยาม 4.1.9

ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ

(i) f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ทุกจุดในช่วงเปิด (a,b)

(ii) f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องทางขวามือที่จุด $x=a$ และต่อเนื่องทางซ้ายมือที่จุด $x=b$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ และ $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

จากตัวอย่างข้างต้น พบว่า f_1 เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ แต่ f_2 ไม่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$

นิยาม 4.1.10

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้บนช่วง I (ซึ่งอาจจะเป็นช่วงเปิด ช่วงปิด หรือไม่เป็นทั้งสองอย่างก็ได้) ถ้ามีจำนวน M ซึ่งทำให้ $\left|f(x)\right| \le M$ สำหรับทุก ๆ $x \in I$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต (bounded) บนช่วง I

ทฤษฎีบท 4.1.25

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $I = [a,b]$ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วง I

ทฤษฎีบท 4.1.26

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ แล้วจะต้องมีจุด $x_1 \in [a,b]$ ที่ทำให้ $f(x_1) \ge f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in [a,b]$

บทแทรก 4.1.27

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ แล้วจะต้องมีจุด $x' \in [a,b]$ ที่ทำให้ $f(x') \le f(x)$ ที่ $x \in [a,b]$

ทฤษฎีบท 4.1.28 (Intermediate Value Theorem)

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และให้ $f(a) = A, f(b) = B$ ถ้า C เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่อยู่ระหว่าง A และ B จะได้ว่า จะต้องมีจุด $c \in [a,b]$ ที่ทำให้ $f(c) = C$

บทแทรก 4.1.29

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และ ถ้า $f(a) < 0 < f(b)$ จะต้องมีจำนวน $c \in [a,b]$ ที่ทำให้ $f(c) = 0$

ทฤษฎีบท 4.1.30

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $\left[0,1\right]$ และเรนจ์ของ f อยู่ในช่วง $\left[0,1\right]$ จะได้ว่า จะต้องมีจุด $x' \in \left[0,1\right]$ อย่างน้อย 1 จุด ที่ทำให้

$$f\left(x'\right)=x'$$

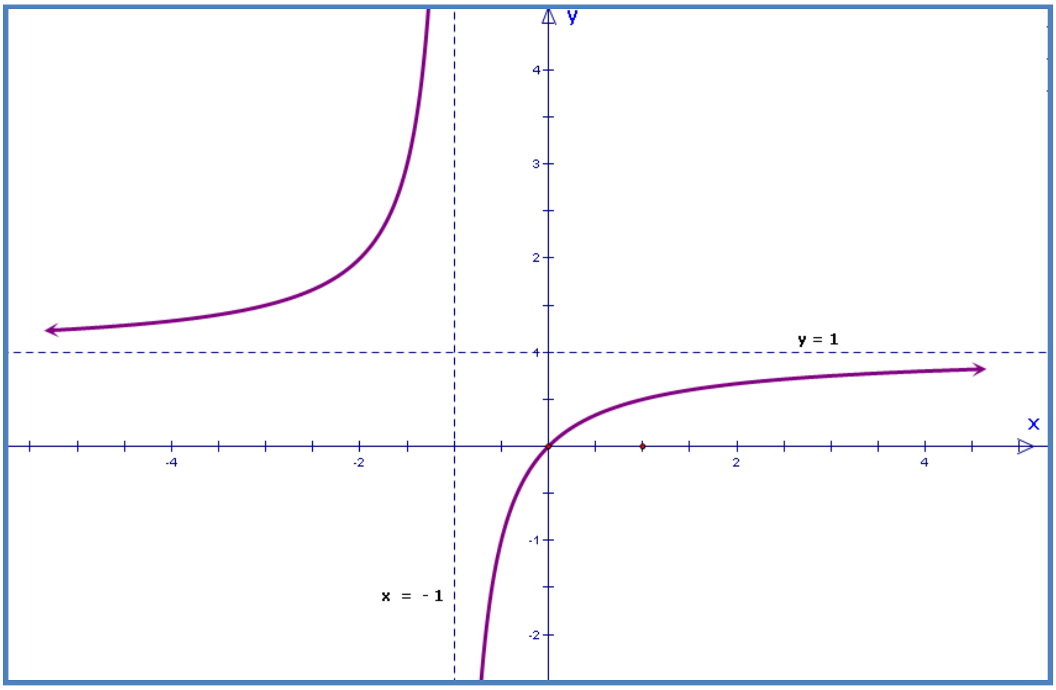
จุด x' ที่มีสมบัติว่า $f\left(x'\right)=x'$ เราเรียกว่า จุดคงที่ (fixed point)

4.1.3 ลิมิตเกี่ยวกับอนันต์ (Limits Involving Infinity)

ก่อนจะกล่าวถึงความหมายของลิมิตที่เกี่ยวกับค่าอนันต์ ขอให้พิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้

$$f\left(x\right)=\frac{x}{x+1}$$

จะพบว่า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่จุดทุกจุดยกเว้นที่จุด $x=-1$ ดังรูป



สำหรับ $x>-1$ จะได้ว่า $f\left(x\right)=\frac{x}{x+1}=1+\frac{-1}{x+1}<1$

และ สำหรับ $x<-1$ จะได้ $f\left(x\right)>1$

ก่อนอื่นขอให้พิจารณาเฉพาะทางด้าน $x>-1$ โดยดูจากค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1, f\left(0\right)=0, f\left(1\right)=\frac{1}{2}, f\left(10\right)=\frac{10}{11}, f\left(100\right)=\frac{100}{101}, f\left(1000\right)=\frac{1000}{1001},\ldots$$

จะเห็นว่า ถ้า x มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ค่าของฟังก์ชันก็จะเพิ่มขึ้น แต่อย่างไรก็ตาม ค่าของฟังก์ชันจะต้องน้อยกว่า 1 เสมอ ลักษณะเช่นนี้เราจะกล่าวว่า ถ้า x มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์ (infinity) ทางด้านบวก $\left(x \to +\infty\right)$ $f\left(x\right)$ จะมีค่าเข้าใกล้ 1 $\left(f\left(x\right) \to 1\right)$ ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to +\infty} f\left(x\right) = 1$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าพิจารณาทางด้าน $x < -1$ จะพบว่า ถ้า x มีค่าลดลงเรื่อย ๆ ค่าของฟังก์ชันก็จะมีค่าลดลงเช่นเดียวกันแต่ยังคงมีค่ามากกว่า 1 เสมอ นั่นคือ ถ้า x มีค่าเข้าสู่ค่าอนันต์ทางด้านลบ $\left(x \to -\infty\right)$ $f\left(x\right)$ จะมีค่าเข้าสู่ 1 $\left(f\left(x\right) \to 1\right)$ ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to -\infty} f\left(x\right) = 1$$

หมายเหตุ สัญลักษณ์ $x \to \infty$ หมายถึง $|x|$ มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต
นั่นคือ $x \to \infty$ ก็ต่อเมื่อ $x \to +\infty$ และ $x \to -\infty$

จากตัวอย่างข้างต้น เราจะกล่าวว่า $\lim\limits_{x \to \infty} f\left(x\right) = 1$

นิยาม 4.1.11

เราจะกล่าวว่า $\lim\limits_{x \to \infty} f\left(x\right) = L$ ก็ต่อเมื่อ ถ้ากำหนดจำนวนบวก ε ใด ๆ จะต้องมีจำนวนจริง $N > 0$ ซึ่งทำให้ $\left|f\left(x\right) - L\right| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ x ที่ $|x| > N$

นิยาม 4.1.12

เราจะกล่าวว่า $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right) = L$ ก็ต่อเมื่อ ถ้ากำหนดจำนวนบวก ε ใด ๆ จะต้องมีจำนวนจริง $N > 0$ ซึ่งทำให้ $\left|f\left(x\right) - L\right| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ x ที่ $x > N$

นิยาม 4.1.13

เราจะกล่าวว่า $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x\right) = L$ ก็ต่อเมื่อ ถ้ากำหนดจำนวนบวก ε ใด ๆ จะต้องมีจำนวนจริง $N > 0$ ซึ่งทำให้ $\left|f\left(x\right) - L\right| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ x ที่ $x < -N$

ทฤษฎีบท 4.1.31

ถ้า $f(x)=\frac{1}{x}$ จะได้ว่า

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

(iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

ทฤษฎีบท 4.1.32

ถ้า $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L_1$ และ $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=L_2$ โดยที่ L_1 และ L_2 เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

(i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)+g(x)\right]=L_1+L_2$

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=L_1\cdot L_2$

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-g(x)\right]=L_1-L_2$

(iv) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$ ถ้า $L_2\neq 0$

ตัวอย่าง 4.1.12 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x+3}{3x-1}$

วิธีทำ กำหนดให้ $f(x)=\frac{5x+3}{3x-1}$ ถ้า $x\neq 0$ เอา x หารทั้งเศษและส่วนของ f จะได้ว่า

$$f(x)=\frac{5+\frac{3}{x}}{3-\frac{1}{x}} \quad ; \quad x\neq 0,\quad x\neq\frac{1}{3}$$

จากทฤษฎีบท 4.1.31 จะได้

$$\lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{3}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}5+\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{3}{x}\right)=5+3\cdot 0$$
$$=5$$

และ $$\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}3-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$$
$$=3-0$$
$$=3$$

ดังนั้น $$\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{3}{x}}{3-\frac{1}{x}}=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{3}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)}=\frac{5}{3}$$

นั่นคือ $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x+3}{3x-1}=\frac{5}{3}$$

□

ถ้าพิจารณาดูกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\frac{x}{x+1}$ ที่กล่าวมาแล้ว โดยสังเกตดูค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้จุด -1 จากตารางต่อไปนี้

$x\to -1^{+}$:

x	1	0	-0.5	-0.9	-0.99	-0.999	...
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	0	-1	-9	-99	-999	...

$x\to -1^{-}$:

x	-2	-1.5	-1.1	-1.01	-1.001	-1.0001	...
$f(x)$	-2	3	11	101	1001	10001	...

จากตารางข้างบน จะพบว่า ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ -1 ทางด้านบวก ค่าของฟังก์ชัน จะลดลงไปเรื่อย ๆ อย่างไม่มีขอบเขต หรือ

$$f(x)\to -\infty \text{ ในขณะที่ } x\to -1^{+}$$

ในทำนองเดียวกัน ในตารางที่สองจะพบว่า ถ้า x มีค่าเข้าสู่ -1 ทางด้านลบ ค่าของ $f(x)$ จะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ อย่างไม่มีขอบเขต หรือ

$$f(x)\to +\infty \text{ ในขณะที่ } x\to -1^{-}$$

นิยาม 4.1.14

เราจะกล่าวว่า $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ ก็ต่อเมื่อ ถ้ากำหนดจำนวน $N>0$ จะต้องมีจำนวน $\delta>0$ ซึ่งทำให้ $f(x)<-N$ สำหรับทุก ๆ x ที่ $a<x<a+\delta$

นิยาม 4.1.15

เราจะกล่าวว่า $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ ก็ต่อเมื่อ ถ้ากำหนดจำนวน $N>0$ จะต้องมีจำนวน $\delta>0$ ซึ่งทำให้ $f(x)>N$ สำหรับทุก ๆ x ที่ $a<x<a+\delta$

นิยาม 4.1.16

เราจะกล่าวว่า $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ ก็ต่อเมื่อ ถ้ากำหนดจำนวน $N>0$ จะต้องมีจำนวน $\delta>0$ ซึ่งทำให้ $f(x)>N$ สำหรับทุก ๆ x ที่ $a-\delta<x<a$

นิยาม 4.1.17

เราจะกล่าวว่า $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ ก็ต่อเมื่อ ถ้ากำหนดจำนวน $N>0$ จะต้องมีจำนวน $\delta>0$ ซึ่งทำให้ $f(x)<-N$ สำหรับทุก ๆ x ที่ $a-\delta<x<a$

นิยาม 4.1.18

เราจะกล่าวว่า $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ ก็ต่อเมื่อ ถ้ากำหนดจำนวน $N>0$ จะต้องมีจำนวน $\delta>0$ ซึ่งทำให้ $|f(x)|>N$ สำหรับทุก ๆ x ที่ $0<|x-a|<\delta$ หรือ $a-\delta<x<a+\delta; x\neq 0$

ตัวอย่างที่ 4.1.13 จงพิสูจน์ว่า (i) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ และ

(ii) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

พิสูจน์ (i) กำหนดจำนวนจริงบวก N และเลือก $\delta = \frac{1}{N}$

เพราะฉะนั้น สำหรับทุก ๆ x ที่ $0 < x < \delta$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = N$$

จากนิยาม 13 จะได้ว่า $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

(ii) กำหนดจำนวนจริงบวก N และเลือก $\delta = \frac{1}{N}$

เพราะฉะนั้น สำหรับทุก ๆ x ที่ $-\delta < x < 0$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{x} < -\frac{1}{\delta} = -N$$

จากนิยาม 16 จะได้ว่า

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

□

ทฤษฎีบท 4.1.33 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

(i) $\lim_{x \to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$

(ii) $\lim_{x \to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = \begin{cases} +\infty & \text{ถ้า } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ -\infty & \text{ถ้า } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$

ทฤษฎีบท 4.1.34 ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ หรือ $-\infty$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = c$ โดยที่ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

(i) $\lim_{x \to a} \left[f(x) + g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x)$

(ii) ถ้า $c \neq 0$ จะได้ว่า

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = \begin{cases} \lim_{x \to a} f(x) & ; \ c > 0 \\ +\infty & ; \ c < 0, \lim_{x \to a} f(x) = -\infty \\ -\infty & ; \ c < 0; \lim_{x \to a} f(x) = +\infty \end{cases}$$

ตัวอย่างที่ 4.1.14 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{1}{(x-5)^2}$ และ $g(x)=(x-5)^2$

จงหา $\lim\limits_{x\to 5}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 23 ในกรณีที่ $n=2$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{1}{(x-5)^2}=+\infty$$

และ $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{1}{(x-5)^2}=+\infty$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{(x-5)^2}=+\infty$

และเพราะว่า $\lim\limits_{x\to 5} g(x)=\lim\limits_{x\to 5}(x-5)^2=0$

นอกจากนั้นจะพบว่า $f(x)\cdot g(x)=1$ สำหรับทุก ๆ $x\neq 5$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 5}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=1$ □

ตัวอย่างที่ 4.1.15 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x}{4-x^2}$

วิธีทำ ถ้า $x>2$ จะได้ว่า $\dfrac{x}{4-x^2}=\dfrac{x}{2+x}\cdot\dfrac{1}{2-x}$

ให้ $f(x)=\dfrac{x}{2+x}=\dfrac{1}{\frac{2}{x}+1}$

และ $g(x)=\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{-1}{(x-2)}$

จากทฤษฎีบท 23 จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=-\infty$

นอกจากนั้นยังได้ว่า $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\dfrac{1}{2}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{4-x^2}&=\lim_{x\to 2^+}\left[f(x)\cdot g(x)\right]\\&=\lim_{x\to 2^+} g(x)\\&=-\infty\end{aligned}$$
□

4.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน (Derivative of Function)

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันมีความสำคัญมากในวิชาแคลคูลัส ซึ่งถือว่าเป็นหัวใจของวิชานี้ และเป็นความรู้ที่นำไปสู่การเกิดความรู้อีกหลายสาขา อนุพันธ์มีประโยชน์กว้างขวางในการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่างๆ อีกทั้งสามารถประยุกต์ใช้ในเรื่องความชัน ความเร็ว ความเร่ง การหาค่าสูงสุด การหาค่าต่ำสุด หรือในเรื่องเกี่ยวกับเศรษฐกิจ

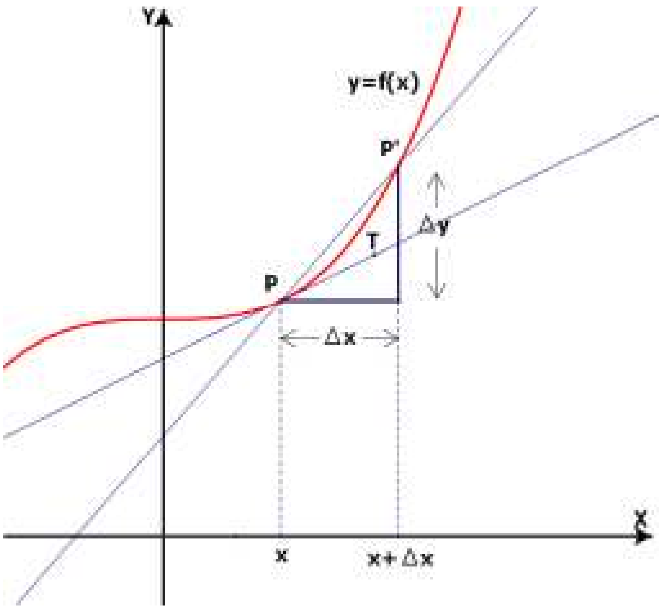
การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันจำแนกฟังก์ชันออกเป็น 2 ลักษณะ คือ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต และการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย ในที่นี้จะกล่าวถึงการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตอย่างละเอียดเพื่อนำไปใช้ต่อยอดในเนื้อหาต่อไป

4.2.1 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต (Differentiation of Algebraic function)

ฟังก์ชันพีชคณิต คือ ฟังก์ชันที่ค่าของฟังก์ชัน เขียนอยู่ในรูปสัญลักษณ์พีชคณิต ซึ่งประกอบด้วย **ค่าคงตัว ตัวแปร** และเครื่องหมาย **บวก ลบ คูณ หาร รากที่สอง กำลัง** เป็นต้น เช่น

$f(x)=2x^3+3x^2+12,\ y=\sqrt[5]{x^3+2x^2+1},\ f(x)=(x+2)(x-1)$ เป็นต้น

ก่อนที่จะศึกษานิยามและทฤษฎีเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เรามาทำความรู้จักอนุพันธ์ของฟังก์ชันในความหมายทางเรขาคณิตเสียก่อน ถ้ากำหนดฟังก์ชัน $y=f(x)$ และให้จุด $P(x,y)$ เป็นจุดบนกราฟของฟังก์ชันดังกล่าว และสมมติให้ว่า ถ้า x เปลี่ยนเป็น $x+\Delta x$ แล้วค่า y จะเปลี่ยนเป็น $y+\Delta y$ (สัญลักษณ์ Δx และ Δy เรียกว่าส่วนเพิ่มเติมของ x (Increment of x) และส่วนเพิ่มเติมของ y (Increment of y) ตามลำดับ ซึ่งอาจจะเป็นบวกหรือลบก็ได้) และให้จุด P' เป็นจุดบนกราฟที่มีพิกัดเป็น $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ ดังรูป



จากรูป ในที่นี้ $y+\Delta y = f(x+\Delta x)$

และ $y=f(x)$

เพราะฉะนั้น $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

ถ้า $\Delta x \neq 0$ จะได้ $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

จากรูปพบว่าอัตราส่วน $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ คือความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด P และ P' ในขณะที่ $\Delta x \longrightarrow 0$ จะพบว่าจุด P' จะเข้าใกล้จุด P หรือเส้นตรง PP' จะเข้าใกล้เส้นตรง PT ซึ่งเป็นเส้นสัมผัสกราฟที่จุด P

นิยาม 4.2.1 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชัน และถ้า $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ หาค่าได้และเป็นจำนวนจริง เราจะเรียกลิมิตนี้ว่า **อนุพันธ์ของฟังก์ชัน *f*** หรือ **อนุพันธ์ของ *y* ต่อตัวแปร *x*** (Derivative of with respect to *x*) และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\frac{dy}{dx}$ หรือ $f'(x)$

นั่นคือ $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้) ในกรณีเช่นนี้ เราเรียก *f* ว่าเป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด x (Differentiable at *x*)

นิยาม 4.2.2 ถ้าฟังก์ชัน *f* เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด *x* แล้วอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ความชันของเส้นสัมผัสกราฟของ *f* ที่จุด $(x, f(x))$

นิยาม 4.2.3 ถ้า *f* เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด *x* ความชันของกราฟของ *f* ที่จุด $(x, f(x))$ คือ ความชันของเส้นสัมผัสกราฟของ *f* ที่สัมผัสที่จุด $(x, f(x))$

นั่นคือ ความชันของกราฟของ *f* ที่จุด $(x, f(x)) = \frac{dy}{dx}$

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชัน (Theorems on Derivative)

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะทำให้เราสามารถคำนวณหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตได้

ทฤษฎีบท 4.2.1 อนุพันธ์ของค่าคงตัวมีค่าเท่ากับศูนย์

ทฤษฎีบท 4.2.2 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $y=f(x)=x^n$ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=nx^{n-1}$$

ทฤษฎีบท 4.2.3 ถ้า $u=f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด x และ c เป็นค่าคงตัวใดๆ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}(cu)=c\frac{du}{dx}$$

ทฤษฎีบท 4.2.4 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก และ c เป็นค่าคงตัวใดๆ เพราะฉะนั้นฟังก์ชัน cx^n จะเป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ สำหรับทุกๆ x และ $\frac{d}{dx}\left(cx^n\right)=cnx^{n-1}$

ทฤษฎีบท 4.2.4 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด x และ $S=f+g$ จะได้ว่า S จะเป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด x และ $\frac{dS}{dx}=\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dx}$

บทแทรก 4.2.5 ถ้า $S=f_1+f_2+\cdots+f_i+\cdots+f_n$ โดยที่ f_i เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด x จะได้ว่า S จะเป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด x และ $\frac{dS}{dx}=\frac{df_1}{dx}+\frac{df_2}{dx}+\cdots+\frac{df_i}{dx}+\cdots+\frac{df_n}{dx}$

บทแทรก 4.2.6 ถ้า f เป็นฟังก์ชันโพลิโนเมียล $f(x)=c_0x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_{n-1}x+c_n$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ และ $c_0,c_1,\ldots,c_n$ เป็นจำนวนใดๆ จะได้ว่า

$$\frac{df}{dx}=f'(x)=c_0nx^{n-1}+c_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+c_{n-1}$$

ตัวอย่าง 4.2.1 จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $y=3x^5+2x^3-3x^2+10$

วิธีทำ เนื่องจาก $y=3x^5+2x^3-3x^2+10$

จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx}=3\frac{d}{dx}x^5+2\frac{d}{dx}x^3-3\frac{d}{dx}x^2+\frac{d}{dx}10$$

$$\frac{dy}{dx}=3\left(5x^4\right)+2\left(3x^2\right)-3\left(2x\right)+0$$

$$\frac{dy}{dx}=15x^4+6x^2-6x$$

เพราะฉะนั้น $\frac{dy}{dx}=15x^4+6x^2-6x$ □

ทฤษฎีบท 4.2.7 ถ้า u และ v เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด x จะได้ว่าผลคูณ $\left(uv\right)$ จะเป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด x และ $\frac{d\left(uv\right)}{dx}=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}$

ตัวอย่าง 4.2.2 กำหนดให้ $y=\left(2x^2-x\right)\left(3x+1\right)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ เนื่องจาก y เป็นผลคูณของสองฟังก์ชัน จากทฤษฎีบทจะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx}=\left(2x^2-x\right)\frac{d}{dx}\left(3x+1\right)+\left(3x+1\right)\frac{d}{dx}\left(2x^2-x\right)$$

$$=\left(2x^2-x\right)\left(3\right)+\left(3x+1\right)\left(4x-1\right)$$

$$=\left(6x^2-3x\right)+\left(12x^2+x-1\right)$$

$$=18x^2-2x-1$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx}=18x^2-2x-1$ □

ทฤษฎีบท 4.2.8 ถ้า $u(x)$ และ $v(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ และถ้า $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ โดยที่ $v(x)\neq 0$ จะได้ว่า

$$f'(x)=\frac{v(x)\cdot u'(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

ตัวอย่าง 4.2.3 กำหนดให้ $y=\dfrac{(x^3-2x^2+1)}{(x-1)}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ เนื่องจาก y เป็นฟังก์ชันผลหาร จากทฤษฎีบท จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-1)\frac{d}{dx}(x^3-2x^2+1)-(x^3-2x^2+1)\frac{d}{dx}(x-1)}{[x-1]^2}$$

$$=\frac{(x-1)(3x^2-4x)-(x^3-2x^2+1)(1)}{[x-1]^2}$$

$$=\frac{3x^3-7x^2+4x-x^3+2x^2-1}{[x-1]^2}$$

$$=\frac{2x^3-5x^2+4x-1}{[x-1]^2}$$

$$=\frac{(x-1)^2(2x-1)}{[x-1]^2}$$

$$=2x-1$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx}=2x-1$ □

ทฤษฎีบท 4.2.9 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $f(x)=x^{-n}$ โดยที่ $x\neq 0$ จะได้ว่า

$$f'(x)=-nx^{-n-1}$$

ตัวอย่าง 4.2.4 กำหนดให้ $f(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}$ โดยที่ $x\neq 0$ จงหา $f'\left(x\right)$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}$ เปลี่ยนรูป จะได้

$f(x)=2x^{-3}+x^{-2}+3x^{-1}$ จากทฤษฎีบท จะได้ว่า

$$f'(x)=2\left(\left(-3\right)x^{-3-1}\right)+\left(\left(-2\right)x^{-2-1}\right)+3\left(\left(-1\right)x^{-1-1}\right)$$

$$f'(x)=-6x^{-4}-2x^{-3}-3x^{-2}$$

ดังนั้น $f'(x)=\frac{-6}{x^4}-\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^2}$ □

ทฤษฎีบท 4.2.10 [กฎลูกโซ่ (Chain Rule)]
สมมติให้ *f*, *g* และ *u* เป็นฟังก์ชันโดยที่ $f(x)=g\circ u\left(x\right)=g\left[u\left(x\right)\right]$ และสมมติให้ *g* และ *u* เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ จะได้ว่า *f* จะเป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ และ

$$f'\left(x\right)=g'\left[u\left(x\right)\right]\cdot u'\left(x\right)$$

หรือ

$$f'\left(x\right)=g'\left(u\right)\cdot u'\left(x\right)$$

บทแทรก 4.2.11 ถ้า $f(x)=\left[u\left(x\right)\right]^n$ โดยที่ *n* เป็นจำนวนเต็มจะได้ว่า

$$f'\left(x\right)=n\left[u\left(x\right)\right]^{n-1}\cdot u'\left(x\right)$$

หมายเหตุ จากกฎลูกโซ่ เราอาจจะกล่าวว่าถ้า $y=f(u)$ และ $u=g\left(x\right)$ จะได้ว่า $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

ตัวอย่าง 4.2.5 กำหนดให้ $f(x)=\left[x^3-5x^2+4x-1\right]^6$ จงหา $f'\left(x\right)$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท และโจทย์ที่กำหนดให้ ในที่นี้ $f(x)=\left[u\left(x\right)\right]^6$ และ $u=x^3-5x^2+4x-1$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'\left(x\right)&=6\left[u\left(x\right)\right]^5\cdot u'\left(x\right)\\ &=6\left[x^3-5x^2+4x-1\right]^5\cdot\frac{d}{dx}\left(x^3-5x^2+4x-1\right)\\ &=6\left(x^3-5x^2+4x-1\right)^5\cdot\left(3x^2-10x+4\right)\end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x)=6\left(x^3-5x^2+4x-1\right)^5\cdot\left(3x^2-10x+4\right)$

□

แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$

2. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

2.1 $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(4\sqrt{1-x}\right)$

2.2 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3-1}{\left|x^3-1\right|}$

2.3 $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3x+1\right)$

2.4 $\lim\limits_{h\to\infty}\dfrac{(x-h)^2-x^2}{h}$

3. จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-5}{x-6}=\dfrac{1}{4}$

4. จงอาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

4.1 $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+4x-3\right)$

4.2 $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{2x+5}{3x-2}}$

4.3 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4}$

4.4 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^5-32}{x-2}$

5. จงตรวจสอบดูว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ต่อเนื่องที่จุดที่กำหนดให้หรือไม่ เพราะเหตุใด

5.1 $f(x)=3x+2 \quad ; \quad x=1,0$

5.2 $f(x)=\begin{cases}-x & ; \ x\geq 0\\ x-1 & ; \ x<0\end{cases}$

5.3 $f(x)=x^2 \quad ; \quad x=-2$

5.4 $f(x)=\left|x-3\right| \quad ; \quad x=3$

6. จงหาลิมิตด้านเดียวของฟังก์ชันต่อไปนี้

6.1 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$

6.2 $\lim\limits_{h\to 2^-}\dfrac{4-x^2}{\sqrt{2+x-x^2}}$

6.3 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$

6.4 $\lim\limits_{x\to 1^+}\left|x-1\right|$

7. จงหาลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ (ถ้ามี) และวาดกราฟของฟังก์ชันนั้นๆ ในกรณีที่ไม่มีลิมิต จงหาลิมิตทางซ้าย และทางขวา (ถ้ามี)

7.1 $f(x)=\begin{cases} -x+6 & ; \; x\leq 3 \\ x & ; \; x>3 \end{cases}$ จงหา $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

7.2 $g(x)=\begin{cases} x & ; \; x<0 \\ \dfrac{1}{x} & ; \; x>0 \end{cases}$ จงหา $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

8. จงหาลิมิตด้านเดียวของฟังก์ชันต่อไปนี้

8.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+4}{3x+1}$

8.3 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-1}{x^2+1}$

8.2 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1+x}}{x}$

8.4 $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$

8.5 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+2}$