บทที่ 1

ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

กระบวนการแก้ปัญหา

ปัญหา

- วิทยาศาสตร์
- วิศวกรรมศาสตร์
- เศรษฐศาสตร์
- ฯลฯ

รูปแบบทางคณิตศาสตร์

- สมการพีชคณิต
- สมการอดีศัย
- สมการเชิงเส้น
- สมการไม่เชิงเส้น
- สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
- สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย
- การหาอนุพันธหรือการอินทิเกรต
- ฯลฯ

วิธีแก้ปัญหา

- ระเบียบวิธีทางคณิตศาสตร์

ผลเฉลย

- ที่มีความแม่นตรง

ตัวอย่าง

การหารากสมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ในรูปแบบชัดแจ้ง คือ

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ถ้า $a = 1, b = -1$ และ $c = 0.24$

จะได้ผลเฉลยเป็น $x = 0.4$ และ $x =$0.6

แต่ถ้า $a = 1, b = 0$และ $c = -2$

จะได้ผลเฉลยเป็น $x = \pm\sqrt{2}$

ตัวอย่าง

การหาค่าของ $f(x)$ ซึ่งไม่ได้นิยามฟังก์ชัน $f(x)$ ไว้ แต่มีค่าของฟังก์ชันสำหรับ x บางค่า เช่น

x	0.5	1.2	3.1	5.3
$f(x)$	-3.2	1.6	-1.8	2.7

ถ้าต้องการหาค่าของ $f(x)$ ที่นอกเหนือจากค่าที่มีอยู่หรือต้องการหาค่าของฟังก์ชันที่เป็นอนุพันธ์ของ $f(x)$ เช่น ต้องการหาค่าของ $f(2.0)$ หรือ $\acute{f}(2.0)$ เป็นต้น จึงจำเป็นที่จะต้องหาฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันประมาณค่าของ เพื่อนำไปใช้หาค่าของ หรือ ซึ่งจะเป็นค่าโดยประมาณต่อไป

การหาระเบียบวิธีที่จะนำไปใช้ในการประมาณค่าของจำนวนจริงบางจำนวน หรือค่าของฟังก์ชันบางฟังก์ชันที่เป็นผลเฉลยของปัญหาในรูปแบบทางคณิตศาสตร์และผลเฉลยที่หาได้จะเป็นผลเฉลยเชิงตัวเลขซึ่งเป็นประโยชน์ต่อการนำไปใช้ในทางปฏิบัติ เรียกว่า การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical Analysis)

ศาสตร์ + ศิลป์ = วิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

ศาสตร์

- การดำเนินการเลขคณิต
- การตัดสินใจทางตรรกศาสตร์

ศิลป์

- วิจารณญาณ
- ความชำนาญ

วิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

ระเบียบวิธีที่ดีที่สุด

ผลเฉลยที่มีความถูกต้องแม่นยำ

ความคลาดเคลื่อน (Errors)

1. ความคลาดเคลื่อนโดยธรรมชาติ (inherent error) เกิดจาก

   (1.1) ตัวแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

   (1.2) ความคลาดเคลื่อนของข้อมูลที่นำมาใช้ในการหาผลเฉลย

2. ความคลาดเคลื่อนในกระบวนการหาผลเฉลย

   (2.1) ความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ (round-off error)

   (2.2) ความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย (truncation error)

   (2.3) ความคลาดเคลื่อนจากความผิดพลาดและเผอเรอ (mistake and blunder)

กำหนดให้ x เป็นค่าแม่นตรงของจำนวนจำนวนหนึ่ง

และ $\tilde{x}$ เป็นค่าประมาณของ x

นิยาม **ค่าความคลาดเคลื่อน (error)** คือ ผลต่างระหว่างค่าแม่นตรงและค่าประมาณของจำนวนหนึ่ง เขียนแทนด้วย e

นั่นคือ $e = x - \tilde{x}$

ในระบบทศนิยม การระบุความแม่นยำของจำนวนที่ใช้เป็นค่าประมาณโดยการปัดเศษ กำหนดได้ 2 ลักษณะ คือ

1. กำหนดจำนวนทศนิยม (decimal place) เป็นการกำหนดจำนวนตัวเลขหลังจุดทศนิยมของจำนวนใดๆ เช่น

0.222 แสดงจำนวนที่มีจำนวนตำแหน่งทศนิยม 3 ตำแหน่ง

3.1412 แสดงจำนวนที่มีจำนวนตำแหน่งทศนิยม 4 ตำแหน่ง

0.012041 แสดงจำนวนที่มีจำนวนตำแหน่งทศนิยม 6 ตำแหน่ง

2. กำหนดจำนวนเลขนัยสำคัญ (significant digit) เป็นการกำหนดจำนวนตัวเลขของจำนวนใดๆ โดยนับจำนวนของตัวเลขที่เริ่มตั้งแต่ตัวเลขที่ไม่ใช่ศูนย์จากทางซ้ายมือไปจนถึงตัวเลขตัวสุดท้าย เช่น

0.222 แสดงจำนวนที่มีจำนวนเลขนัยสำคัญ 3 ตัว

3.1412 แสดงจำนวนที่มีจำนวนเลขนัยสำคัญ 5 ตัว

0.012041 แสดงจำนวนที่มีจำนวนเลขนัยสำคัญ 5 ตัว

กรณีที่ตัวเลขเป็นจำนวนเต็ม เช่น 14620

จำนวนจริง “0” ในหลักหน่วยจะมีนัยสำคัญหรือไม่นั้น ขึ้นอยู่กับความต้องการของผู้ใช้ที่จะระบุ เช่น ถ้าระบุว่าตัวเลขที่กำลังพิจารณาอยู่ในขณะนั้นเป็นจำนวนที่มีค่าอยู่ระหว่าง 14615 และ 14625 จำนวนจริง “0” นี้ก็ถือว่าไม่มีนัยสำคัญ และนิยมที่จะเขียนให้อยู่ในรูปแบบจุดลอย คือ 1.462×10^4 ไม่เช่นนั้นแล้วก็จะแสดงเป็น 1.4620×10^4

ตัวอย่าง กำหนดค่าประมาณของ e เท่ากับ 2.7182818 แสดงเป็นจำนวนแบบจุดลอยได้เป็น $e \approx 2.7182818 = 0.27182818 \times 10^1$ มีจำนวนเลขนัยสำคัญ 8 ตัว

ตัวอย่าง กำหนด $x = 2138$ แสดงเป็นจำนวนแบบจุดลอยเป็น

$x = 0.2138 \times 10^4$ กล่าวว่า มีจำนวนเลขนัยสำคัญ 4 ตัว

แต่ถ้าแสดงเป็น

$x = 0.21380 \times 10^4$ กล่าวว่า มีจำนวนเลขนัยสำคัญ 5 ตัว

รูปแบบจุดลอย (floating point)

ในระบบจำนวนจริง x ใดๆ คือ

$$x = \pm 0.f_1 f_2 \ldots f_n \times 10^{\pm E}$$

เมื่อ f_i เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $0 \le f_i < 10, 1 \le f_1 < 10$

n เป็นจำนวนเลขนัยสำคัญ

E เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

เช่น -0.00123 แสดงเป็นจำนวนแบบจุดลอยได้เป็น -0.123×10^{-2}

123.456 แสดงเป็นจำนวนแบบจุดลอยได้เป็น 0.123456×10^{3}

0.00005 แสดงเป็นจำนวนแบบจุดลอยได้เป็น ....

1234 แสดงเป็นจำนวนแบบจุดลอยได้เป็น ....

บทนิยาม

ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (absolute error) คือ ขนาดของค่าคลาดเคลื่อน เขียนแทนด้วย $|e|$

นั่นคือ

$$|\boldsymbol{e}| = |\boldsymbol{x} - \widetilde{\boldsymbol{x}}|$$

บทนิยาม

ค่าขอบเขตของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (error bound) คือ ค่าสูงสุดของขนาดของค่าคลาดเคลื่อน

เขียนแทนด้วย ε

นั่นคือ

$$|x - \tilde{x}| = |e| \le \varepsilon$$

บทนิยาม

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (relative error) คือ อัตราส่วนของค่าคลาดเคลื่อนและค่าแม่นตรง (ที่ไม่เป็นศูนย์)

เขียนแทนด้วย $Rel(\tilde{x})$

นั่นคือ

$$\boldsymbol{Rel(\widetilde{x}) = \frac{x - \widetilde{x}}{x}}$$

เมื่อ $x \neq 0$

ตัวอย่าง

ให้ $\boldsymbol{\pi}$ มีค่าแม่นตรงเท่ากับ 3.14159265... และกำหนดค่าประมาณของ $\boldsymbol{\pi}$ เท่ากับ $\frac{\mathbf{22}}{\mathbf{7}}$ ค่าประมาณนี้มีค่าคลาดเคลื่อนเป็นเท่าใด

วิธีทำ แปลง $\frac{\mathbf{22}}{\mathbf{7}}$ ให้อยู่ในรูปทศนิยม จะได้

$$\frac{\mathbf{22}}{\mathbf{7}} = 3.14285714...$$

ดังนั้น $e = x - \tilde{x}$

$$= \boldsymbol{\pi} - \frac{\mathbf{22}}{\mathbf{7}}$$

$$= 3.14159265... - 3.14285714...$$

$$= -0.00126449... \qquad \square$$

บทนิยาม

ให้ $\boldsymbol{x}$ เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ เป็นค่าประมาณของ $\boldsymbol{x}$ กล่าวว่า $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ เป็นค่าประมาณของ $\boldsymbol{x}$ ที่มีความแม่นยำถึงทศนิยมตำแหน่งที่ $\boldsymbol{n}$

ถ้า $\quad |x - \widetilde{x}| = |e| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-n}$

และ $\quad |x - \widetilde{x}| = |e| \geq \frac{1}{2} \times 10^{-n-1}$

ตัวอย่าง

อยากทราบว่า $\frac{22}{7}$ ใช้เป็นค่าประมาณของ $\boldsymbol{\pi}$ ได้แม่นยำถึงทศนิยมตำแหน่งที่เท่าใด

วิธีทำ จะเห็นว่า $\left|\boldsymbol{\pi} - \frac{22}{7}\right| = 0.00126449$

และพบว่า

$$\frac{1}{2} \times 10^{-3} = 0.0005 \leq 0.00126449 \leq 0.005 = \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

ดังนั้น $\frac{22}{7}$ เป็นค่าประมาณของ $\boldsymbol{\pi}$ ได้แม่นยำถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 2

$\square$

ตัวอย่าง

กำหนดค่าประมาณของ $\boldsymbol{\pi}$ เท่ากับ $\mathbf{\frac{355}{113}}$ ค่าประมาณนี้มีความแม่นยำถึงทศนิยมตำแหน่งที่เท่าใด

วิธีทำ

$\square$

บทนิยาม

ให้ $\boldsymbol{x}$ เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^* \times \mathbf{10}^{\boldsymbol{r}}$

เมื่อ $\mathbf{1} < \boldsymbol{x}^* < \mathbf{10}$, $\boldsymbol{r}$ เป็นจำนวนเต็ม และ $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ เป็นค่าประมาณของ $\boldsymbol{x}$ กล่าวว่า $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ เป็นค่าประมาณของ $\boldsymbol{x}$ ที่มีความแม่นยำโดยมีจำนวนเลขนัยสำคัญ n ตัว

ถ้า $|\boldsymbol{x} - \widetilde{\boldsymbol{x}}| = \mathbf{5} \times \mathbf{10}^{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{n}}$

หรือ $\left|\frac{\boldsymbol{x}-\widetilde{\boldsymbol{x}}}{\boldsymbol{x}}\right| = |\boldsymbol{Rel}(\widetilde{\boldsymbol{x}})| \leq \frac{\mathbf{5}}{\boldsymbol{x}^*} \times \mathbf{10}^{\boldsymbol{n}}$

ตัวอย่าง

ถ้าค่าประมาณของ $\boldsymbol{\pi}$ เท่ากับ $\frac{\mathbf{22}}{\mathbf{7}}$ เป็นค่าประมาณที่มีความแม่นยำโดยมีเลขนัยสำคัญกี่ตัว

วิธีทำ ให้ $\boldsymbol{x = 3.14159265\ldots}$

และ $\boldsymbol{\tilde{x} = \frac{22}{7} = 3.14285714\ldots}$

จะได้ว่า $\boldsymbol{|x - \tilde{x}| = 0.00126449\ldots \leq 5 \times 10^{-3}}$

ดังนั้น $\frac{\mathbf{22}}{\mathbf{7}}$ เป็นค่าประมาณของ $\boldsymbol{\pi}$ ที่มีความแม่นยำ โดยมีจำนวนเลขนัยสำคัญ 3 ตัว □

ตัวอย่าง

กำหนดค่าประมาณของ $\frac{2}{9}$ เท่ากับ 0.222 ค่าประมาณนี้มีความแม่นยำโดยมีจำนวนเลขนัยสำคัญเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ

$\square$