

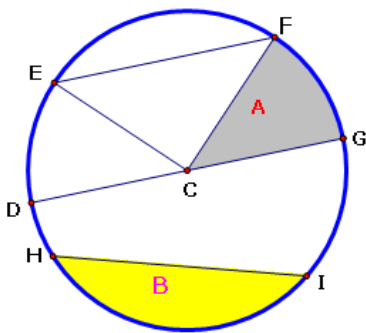
ภาคตัดกรวย (Conic Sections)

1. วงกลม (Circle)

วงกลม เกิดขึ้นจากการตัดกรวยกลมตรงด้วยระนาบที่ตั้งฉากกับแกนของกรวย

นิยาม วงกลม คือ เซตของจุดบนระนาบซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบ เป็นระยะทางเท่ากันเสมอเรียกจุดคงที่ว่า จุดศูนย์กลางและเรียกระยะทางที่เท่ากันว่ารัศมีของวงกลม

ส่วนประกอบของวงกลม



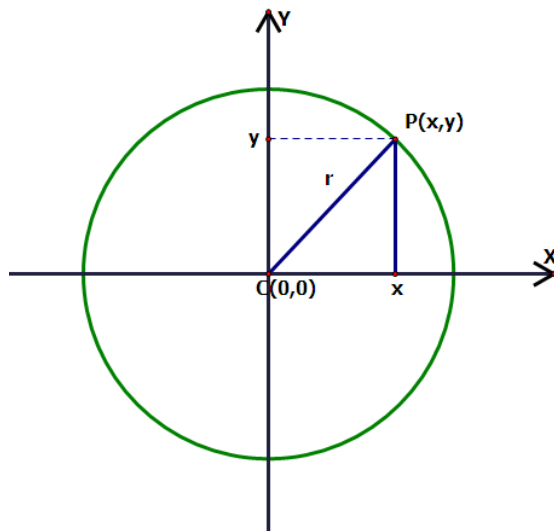
- C คือ จุดศูนย์กลาง
- DG คือ เส้นผ่านศูนย์กลาง
- CF, CE, CG, CD คือ รัศมี
- HI, EF คือ คอร์ด
- พื้นที่ A เรียกว่า เซกเตอร์
- พื้นที่ B เรียกว่า เซกเมนต์

รูปที่ 1.1

รูปแบบของสมการวงกลม

- วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$ รัศมียาว r หน่วย จะมีรูปสมการ ดังนี้

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{ดังรูปที่ 1.2}$$



รูปที่ 1.2

โดยรูปสมการได้มาจากการหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด จากรูปที่ 1.2 จะได้ว่า

$$|\overline{CP}| = r$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$

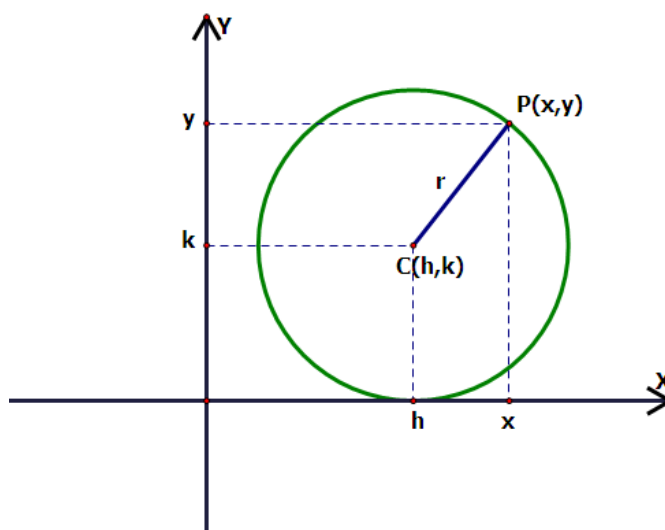
$$x^2 + y^2 = r^2$$

ดังนั้น

#

2. วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) รัศมียาว r หน่วย จะมีรูปสมการ ดังนี้

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad \text{ดังรูปที่ 1.3}$$



รูปที่ 1.3

โดยรูปสมการได้มาจากการหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด จากรูปที่ 1.3 จะได้ว่า

$$|\overline{CP}| = r$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

ดังนั้น

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

#

รูปทั่วไปของสมการวงกลม

รูปทั่วไปสมการวงกลม ได้จากการกระจายของสมการ

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x^2 - 2xh + h^2) + (y^2 - 2yk + k^2) = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2xh - 2yk + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - (2h)x - (2k)y + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

ดังนั้น จะได้รูปทั่วไปของสมการวงกลม คือ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

เมื่อ A, B, C เป็นค่าคงที่

จากรูปสมการ $x^2 + y^2 - (2h)x - (2k)y + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$ จะได้ว่า

ถ้ากำหนดให้ $A = -2h$, $B = -2k$, $h^2 + k^2 - r^2 = C$

$$\text{ดังนั้น } h = -\frac{A}{2} \quad \text{และ} \quad k = -\frac{B}{2}$$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

และจาก $h^2 + k^2 - r^2 = C$

$$-r^2 = C - h^2 - k^2$$

$$r^2 = h^2 + k^2 - C \quad \dots\dots\dots(1)$$

แทนค่า $h = -\frac{A}{2}$ และ $k = -\frac{B}{2}$ ในสมการ (1)

$$\text{จะได้ว่า } r^2 = \left(-\frac{A}{2}\right)^2 + \left(-\frac{B}{2}\right)^2 - C$$

$$r^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C$$

$$r^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}$$

$$r = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$$

$$\text{รัศมียาว} = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C} \quad \text{เมื่อ } A^2 + B^2 - 4C > 0$$

การเขียนกราฟของวงกลม

มีหลักการดังนี้

1. เปลี่ยนรูปทั่วไปของสมการวงกลมให้อยู่ในรูปมาตรฐาน โดยใช้ความรู้เรื่องสมการกำลังสองสมบูรณ์เพื่อหาจุดศูนย์กลาง และความยาวของรัศมี
2. เขียนกราฟโดยลงจุดศูนย์กลางและความยาวของรัศมี

ข้อควรจำ ในการแก้ปัญหาวงกลมจำเป็นต้องเข้าใจสาระสำคัญ ซึ่งสรุปดังตาราง 1.1

ตาราง 1.1 สมการ จุดศูนย์กลาง รัศมี ของวงกลมที่อยู่ในรูปมาตรฐานและรูปทั่วไป

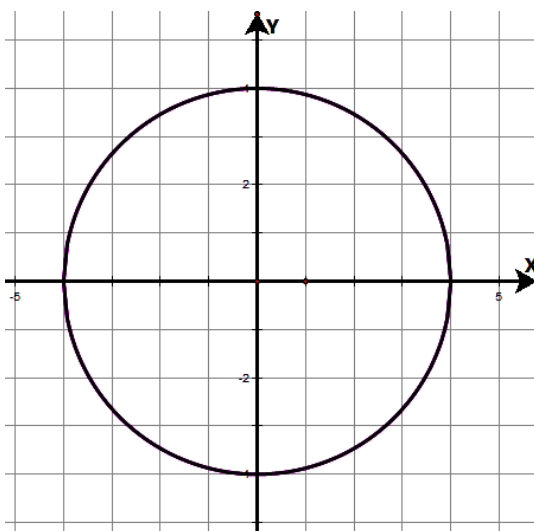
	วงกลมรูปมาตรฐาน	วงกลมทั่วไป
สมการ	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2; r > 0$	$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0;$ $A^2 + B^2 - 4C > 0$
จุดศูนย์กลาง	(h, k)	$\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2} \right)$
รัศมี	r	$\frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$

ตัวอย่าง 1.1 จงหาสมการรูปทั่วไปของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และมีรัศมียาว 4 หน่วย พร้อมทั้งเขียนกราฟ

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ เขียนให้อยู่ในรูปมาตรฐาน ดังนี้

$$x^2 + y^2 = 4^2$$

ดังนั้นรูปทั่วไปของวงกลมนี้ คือ $x^2 + y^2 - 4^2 = 0$ หรือ $x^2 + y^2 - 16 = 0$ และเขียนกราฟได้ดังนี้



□

ตัวอย่าง 1.2 จงหาจุดศูนย์กลาง รัศมี และเขียนกราฟของสมการวงกลม

$$x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$$

วิธีทำ วิธีที่ 1 จากสมการ $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ จัดให้อยู่ในรูปสมการกำลังสองสมบูรณ์ ดังนี้

$$x^2 + y^2 - 4y = 5$$

$$x^2 + (y^2 - 4y + 2^2) = 5 + 2^2$$

$$x^2 + (y^2 - 4y + 2^2) = 5 + 4$$

$$(x-0)^2 + (y-2)^2 = 9$$

$$(x-0)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่ $(0,2)$ รัศมียาว 3 หน่วย

วิธีที่ 2 จากสมการ $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ เปรียบเทียบกับสมการ

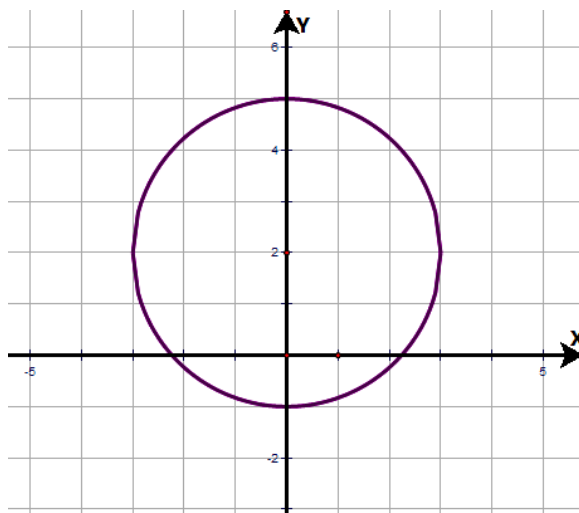
$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

จะได้ว่า $A=0$, $B=-4$, $C=-5$

ดังนั้น รัศมีของวงกลม คือ $\frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C} = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + (-4)^2 - 4(-5)}$
 $= 3$ หน่วย

จุดศูนย์กลางของวงกลม คือ $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = \left(-\frac{0}{2}, -\frac{(-4)}{2}\right) = (0,2)$

และเขียนกราฟได้ดังนี้



□

แบบฝึกหัดที่ 1 เรื่องวงกลม

1. จงหาสมการวงกลมที่มีเงื่อนไขตามที่กำหนดให้ต่อไปนี้
 - 1.1 มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และมีรัศมียาว 2 หน่วย
 - 1.2 มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(3,1)$ และมีรัศมียาว 3 หน่วย
 - 1.3 มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(1,-1)$ และผ่านจุด $(4,2)$
 - 1.4 มีจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางอยู่ที่ $(-3,3)$ และ $(3,-1)$

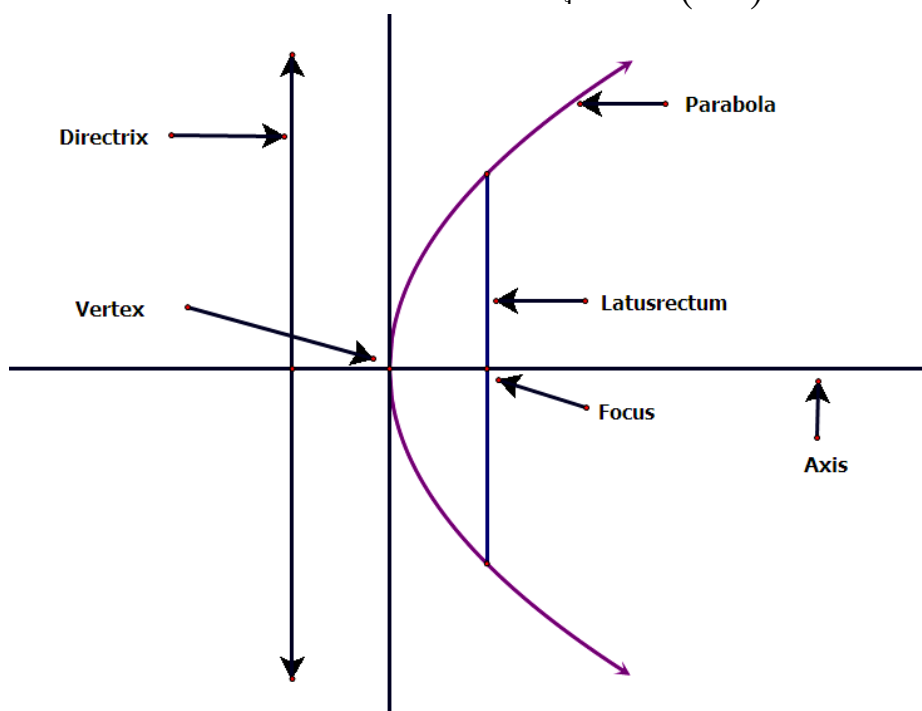
2. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมที่กำหนดสมการให้ดังนี้ พร้อมเขียนกราฟ
 - 2.1 $x^2 + y^2 - 36 = 0$
 - 2.2 $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$
 - 2.3 $x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$
 - 2.4 $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$
 - 2.5 $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$

2. พาราโบลา (Parabola)

นิยาม พาราโบลา คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งและอยู่ห่างจากเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากันเสมอ

ส่วนประกอบของพาราโบลา

1. จุดคงที่เรียกว่า จุดโฟกัส (Focus) เขียนแทนด้วย F
2. เส้นตรงคงที่ เรียกว่า เส้นไดเรกทริกซ์
3. เส้นตรงที่ลากผ่านโฟกัสและตั้งฉากกับเส้นไดเรกทริกซ์ เรียกว่า แกนของพาราโบลา
4. จุดที่กราฟตัดกับแกนพาราโบลาเรียกว่า จุดยอด
5. ระยะทางจากจุดยอดไปยังโฟกัส เขียนแทนด้วย c
6. คอร์ดที่ตั้งฉากกับแกนของพาราโบลาและผ่านจุดโฟกัส (AA') เรียกว่า ลาตัสเรกตัม



รูปที่ 2.1

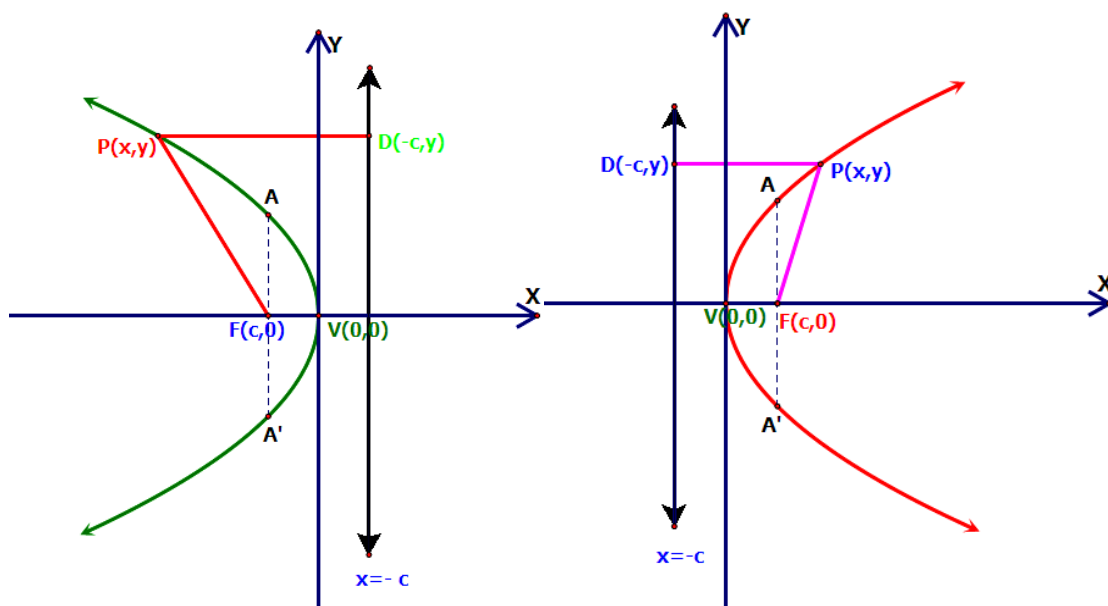
รูปแบบของพาราโบลา

1. จุดยอดของพาราโบลา อยู่ที่ $(0,0)$

1.1 พาราโบลาที่มีแกน x เป็นแกนสมมาตร จะมี 2 ลักษณะ ดังนี้

1.1.1 พาราโบลารูปเปิดด้านขวา หรือตะแคงขวา มีรูปสมการ คือ

$$y^2 = 4cx \quad \text{โดยที่ } c > 0 \quad \text{ดังรูปที่ 2.2 (ขวามือ)}$$



รูปที่ 2.2

จากรูปที่ 2.2 สามารถหารูปสมการดังกล่าวได้โดยอาศัยนิยามของพาราโบลา
จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 |\overline{FP}| &= |\overline{PD}| \\
 \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} &= \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-y)^2} \\
 (x-c)^2 + (y-0)^2 &= (x+c)^2 \\
 (x-c)^2 + y^2 &= (x+c)^2 \\
 (x-c)^2 - (x+c)^2 + y^2 &= 0 \\
 y^2 &= (x^2 + 2xc + c^2) - (x^2 - 2xc + c^2) \\
 y^2 &= x^2 + 2cx + c^2 - x^2 + 2cx - c^2 \\
 y^2 &= 4cx
 \end{aligned}$$

1.1.2 พาราโบลารูปเปิดด้านซ้าย หรือตะแคงซ้าย มีรูปสมการ คือ

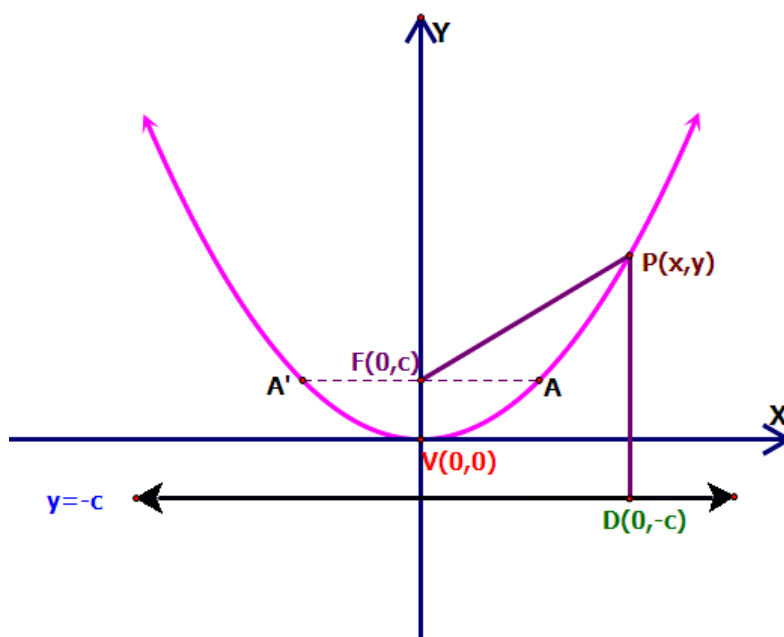
$$y^2 = 4cx \quad \text{โดยที่ } c < 0 \text{ ดังรูปที่ 2.2 (ซ้ายมือ)}$$

(วิธีการหารูปสมการทำนองเดียวกันกับหัวข้อ 1.1.1)

1.2 พาราโบลาที่แกน y เป็นแกนสมมาตร จะมี 2 ลักษณะ ดังนี้

1.2.1 พาราโบลารูปเปิดด้านบน หรือพาราโบลาหงาย มีรูปสมการ คือ

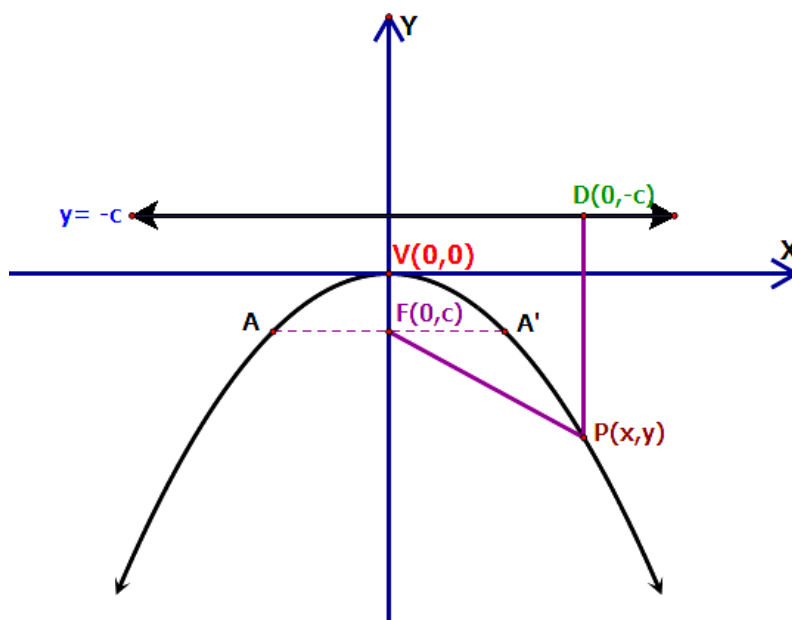
$$x^2 = 4cy \quad \text{โดยที่ } c > 0 \text{ ดังรูปที่ 2.3}$$



รูปที่ 2.3

1.2.2 พาราโบลารูปเปิดด้านล่าง หรือพาราโบลาคว่า มีรูปสมการ คือ

$$x^2 = 4cy \quad \text{โดยที่ } c < 0 \quad \text{ดังรูปที่ 2.4}$$



รูปที่ 2.4

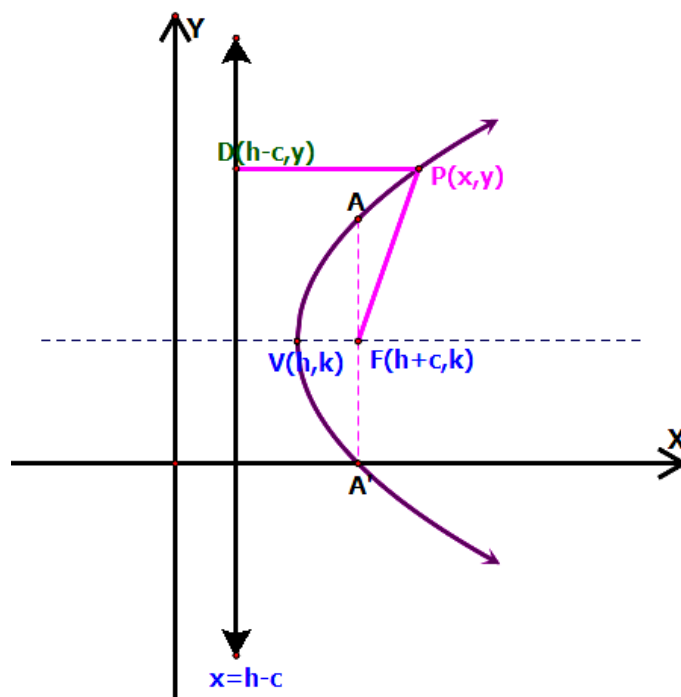
2. จุดยอดของพาราโบลายู่ที่ (h,k)

รูปสมการของพาราโบลามีจุดยอดอยู่ที่จุด (h,k) สามารถหารูปสมการได้เช่นเดียวกับหัวข้อ 1 และแบ่งเป็น 2 รูปแบบ ดังนี้

2.1 พาราโบลาที่มีแกน x เป็นแกนสมมาตร จะมี 2 ลักษณะ ดังนี้

2.1.1 พาราโบลาเปิดด้านขวา หรือพาราโบลาตะแคงขวา มีรูปสมการ คือ

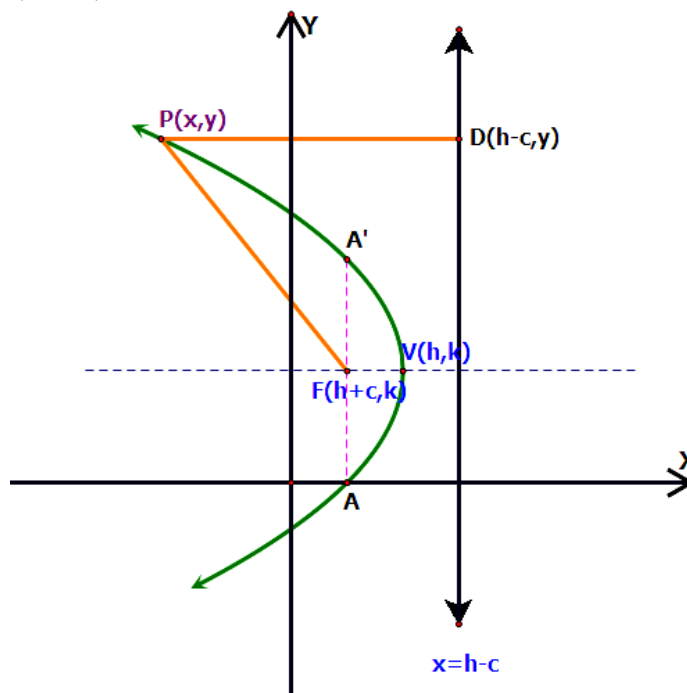
$$(y-k)^2 = 4c(x-h) \quad \text{โดยที่ } c > 0 \quad \text{ดังรูปที่ 2.5}$$



รูปที่ 2.5

2.1.2 พาราโบลาเปิดด้านซ้าย หรือพาราโบลาตะแคงซ้าย มีรูปสมการ คือ

$$(y-k)^2 = 4c(x-h) \quad \text{โดยที่ } c < 0 \quad \text{ดังรูปที่ 2.6}$$

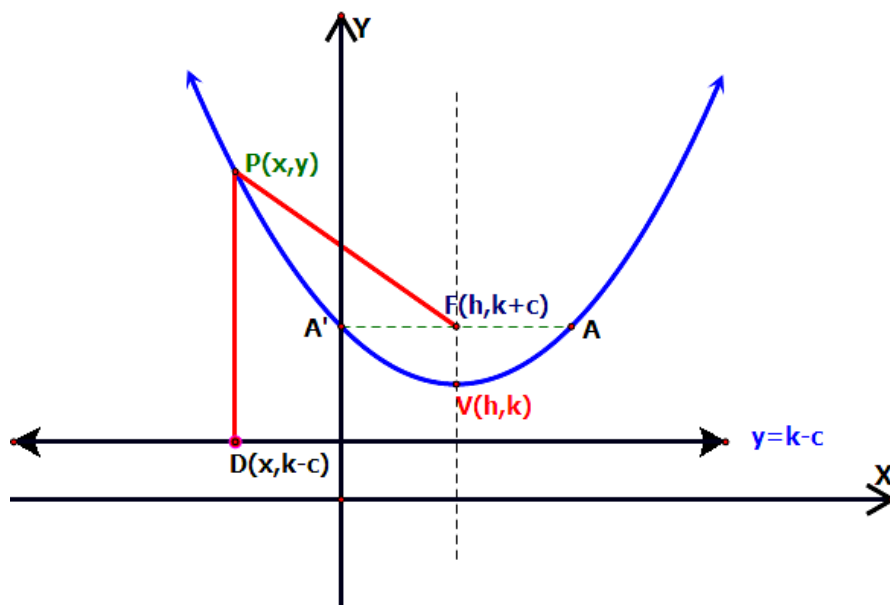


รูปที่ 2.6

2.2 พาราโบลาที่แกน y เป็นแกนสมมาตร จะมี 2 ลักษณะ ดังนี้

2.2.1 พาราโบลาเปิดด้านบน หรือพาราโบลาหงาย มีรูปสมการ คือ

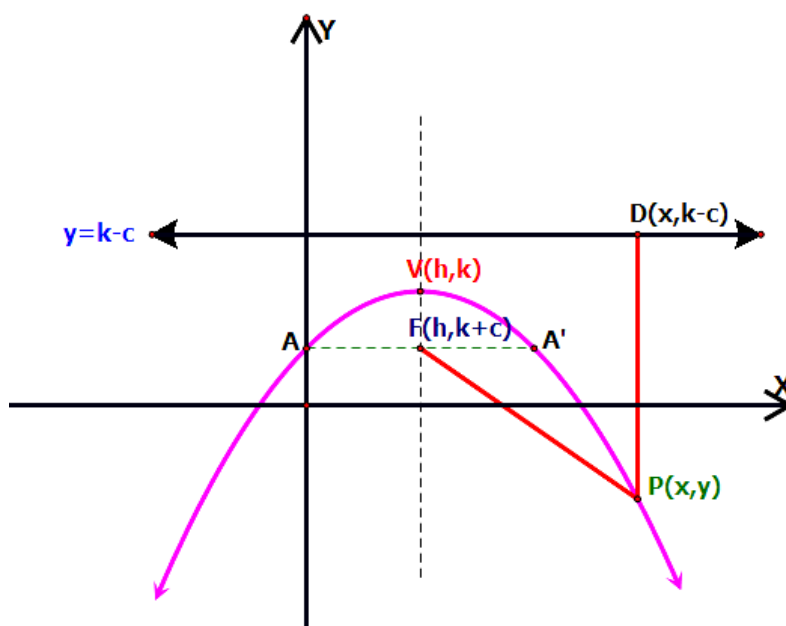
$$(x-h)^2 = 4c(y-k) \quad \text{โดยที่ } c > 0 \quad \text{ดังรูปที่ 2.7}$$



รูปที่ 2.7

2.2.2 พาราโบลาเปิดด้านล่าง หรือพาราโบลาคว่ำ มีรูปสมการ คือ

$$(x-h)^2 = 4c(y-k) \quad \text{โดยที่ } c < 0 \quad \text{ดังรูปที่ 2.8}$$



รูปที่ 2.8

รูปทั่วไปของพาราโบลา

เมื่อ D, E, F เป็นค่าคงตัวใด ๆ รูปทั่วไปของพาราโบลาเป็นดังนี้

1. แกนสมมาตรขนานแกน x (กราฟจะตะแคงขวาหรือซ้าย) จะมีรูปสมการ ดังนี้

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{เมื่อ } D \neq 0$$

2. แกนสมมาตรขนานแกน y (กราฟจะหงายหรือคว่ำ) จะมีรูปสมการ ดังนี้

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{เมื่อ } E \neq 0$$

การเขียนกราฟของพาราโบลา

มีหลักการดังนี้

1. เปลี่ยนรูปทั่วไปของสมการพาราโบลาให้อยู่ในรูปมาตรฐาน เพื่อหาจุดยอด จุดโฟกัส ความยาวลาตัสเรกตัม และสมการไคเรกตริกซ์
2. เขียนกราฟของพาราโบลาโดยลงจุดยอด จุดโฟกัส ความยาวลาตัสเรกตัม และเขียนเส้นโค้งพาราโบลาผ่านจุดยอดและจุดปลายความยาวลาตัสเรกตัมทั้งสอง และเขียนสมการไคเรกตริกซ์

ข้อควรจำ ในการแก้ปัญหาเรื่องพาราโบลา ควรทำความเข้าใจสาระสำคัญ ซึ่งสรุปดังตารางต่อไปนี้

1. พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0)$

สมการรูปมาตรฐาน	ลักษณะของรูป	จุดโฟกัส	สมการไคเรกตริกซ์	แกนพาราโบลา
$x^2 = 4cy$	เปิดด้านบน	$F(0,c)$	$y = -c$	แกน Y ($x = 0$)
$x^2 = -4cy$	เปิดด้านล่าง	$F(0,-c)$	$y = c$	แกน Y ($x = 0$)
$y^2 = 4cx$	เปิดด้านขวา	$F(c,0)$	$x = -c$	แกน X ($y = 0$)
$y^2 = -4cx$	เปิดด้านซ้าย	$F(-c,0)$	$x = c$	แกน X ($y = 0$)

2. พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h,k)

สมการรูปมาตรฐาน	ลักษณะของรูป	จุดโฟกัส	สมการไคเรกตริกซ์	แกนพาราโบลา
$(x-h)^2 = 4c(y-k)$	เปิดด้านบน	$F(h,k+c)$	$y = k - c$	$x = h$
$(x-h)^2 = -4c(y-k)$	เปิดด้านล่าง	$F(h,k-c)$	$y = k + c$	$x = h$
$(y-k)^2 = 4c(x-h)$	เปิดด้านขวา	$F(h+c,k)$	$x = h - c$	$y = k$
$(y-k)^2 = -4c(x-h)$	เปิดด้านซ้าย	$F(h-c,k)$	$x = h + c$	$y = k$

ตัวอย่าง 2.1 จงหาสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด ผ่านจุด $(4,1)$ และมีแกน Y เป็นแกนพาราโบลา พร้อมเขียนกราฟ

วิธีทำ จากโจทย์ พาราโบลาผ่านจุด $(4,1)$ มีจุดยอดอยู่ที่ $(0,0)$ และมีแกน Y เป็นแกนพาราโบลา

ดังนั้น เป็นพาราโบลาหงาย จะหาค่า c ได้โดยแทนค่า $x=4, y=1$ ในสมการรูปมาตรฐาน ดังนี้

$$x^2 = 4cy$$

$$(4)^2 = 4c(1)$$

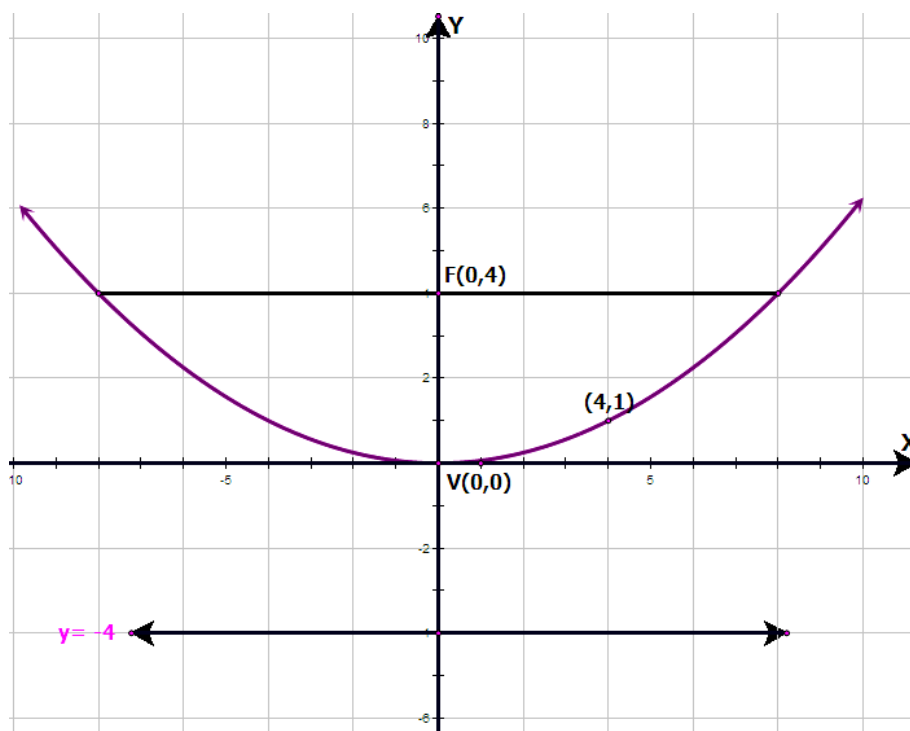
$$16 = 4c$$

$$c = 4$$

ดังนั้น สมการพาราโบลา คือ $x^2 = 4(4)y$

$$x^2 = 16y \text{ หรือ } x^2 - 16y = 0$$

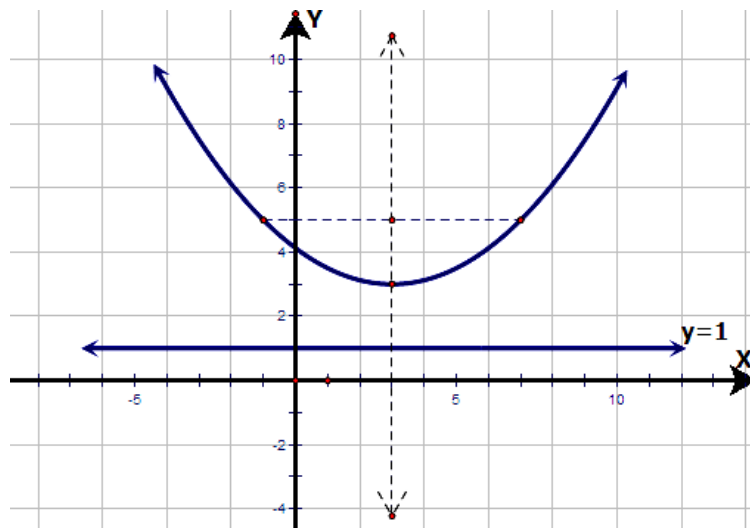
และเขียนกราฟได้ดังนี้



□

ตัวอย่าง 2.2 จงหาสมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(3,3)$ และมีสมการไคเรตริกซ์คือ $y=1$ พร้อมเขียนกราฟ

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ เขียนกราฟเพื่อสร้างความสัมพันธ์ได้ดังนี้



จากรูป จะได้ ค่า $c=3-1=2$ หน่วย ดังนั้นเขียนให้อยู่ในรูปมาตรฐาน ได้ดังนี้

$$(x-3)^2 = 4(2)(y-3)$$

$$x^2 - 6x + 9 = 8(y-3)$$

$$x^2 - 6x + 9 = 8y - 24$$

$$x^2 - 6x - 8y + 33 = 0$$

ดังนั้นสมการพาราโบลา คือ $x^2 - 6x - 8y + 33 = 0$ □

ตัวอย่าง 2.3 จงหาสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(0,0)$ มีจุดปลายของลาตัสเรกต์มอยู่ที่ $(-4,-2)$ และ $(4,-2)$ พร้อมเขียนกราฟ

วิธีทำ เนื่องจากจุดปลายของลาตัสเรกต์มอยู่ในคอร์ดิเนตที่ 3 และ 4 ดังนั้นพาราโบลามีลักษณะ

เป็นพาราโบลาคว่า และมีจุดโฟกัสอยู่ที่ $\left(\frac{-4+4}{2}, \frac{(-2)+(-2)}{2}\right) = (0,-2)$ ทำให้ได้ว่า

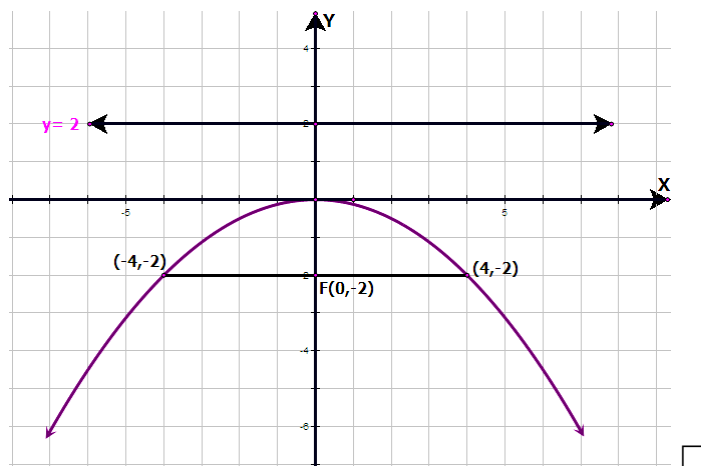
$$c = -2$$

นั่นคือ สมการพาราโบลา คือ $x^2 = 4cy$

$$x^2 = 4(-2)y$$

$$x^2 = -8y \text{ หรือ } x^2 + 8y = 0$$

เขียนกราฟได้ดังนี้



ตัวอย่าง 2.4 จงหาจุดยอด จุดโฟกัส สมการไคเรตริกซ์ แกนพาราโบลา และความยาวของลาตัสเรกตัม ของสมการพาราโบลา $x^2 - 8x + 4y + 4 = 0$ พร้อมเขียนกราฟ

วิธีทำ จากสมการ $x^2 - 8x + 4y + 4 = 0$ เขียนให้อยู่ในรูปมาตรฐาน ดังนี้

$$x^2 - 8x + 16 = -4y - 4 + 16$$

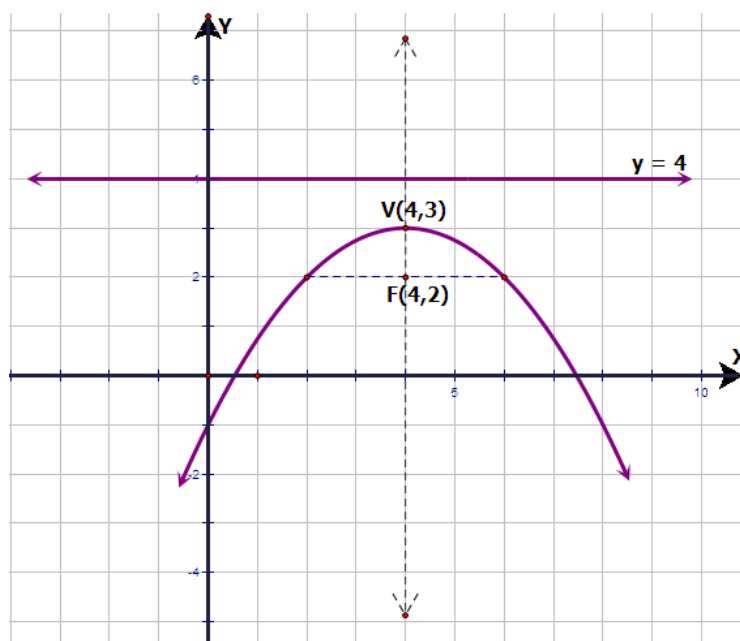
$$(x - 4)^2 = -4y + 12$$

$$(x - 4)^2 = -4(y - 3)$$

$$(x - 4)^2 = 4(-1)(y - 3)$$

ดังนั้น ค่า $c = -1$ และได้ว่า จุดยอดอยู่ที่ $V(h, k) = (4, 3)$ จุดโฟกัสอยู่ที่

$F(h, k + c) = (4, 2)$ สมการไคเรตริกซ์ คือ $y = 4$ แกนพาราโบลา คือ เส้นตรง $x = 4$ ความลาตัสเรกตัม เท่ากับ 4 หน่วย และเขียนกราฟได้ดังนี้



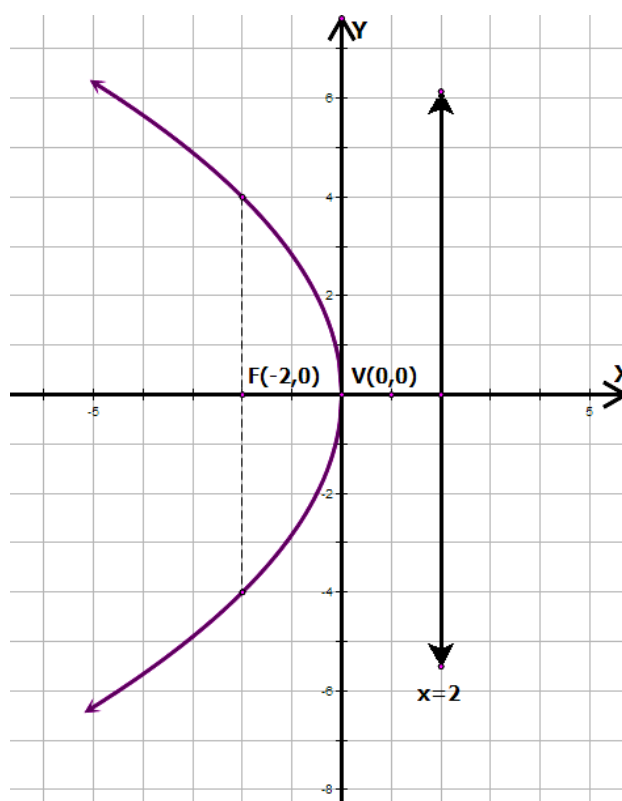
ตัวอย่าง 2.5 จงหาสมการพาราโบลา ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด มีสมการไคเรตริกซ์ $x=2$ และมีแกน X เป็นแกนพาราโบลา

วิธีทำ กำหนดให้สมการไคเรตริกซ์ $x=2$ มีแกน X เป็นแกนพาราโบลา และมีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0)$ ดังนั้น พาราโบลามีลักษณะตะแคงซ้าย จะได้ว่า $c=-2$

ดังนั้น สมการพาราโบลา คือ $y^2 = 4(-2)x$

$$y^2 = -8x$$

และเขียนกราฟ ดังนี้



□

ตัวอย่าง 2.6 จงหาจุดยอด จุดโฟกัส สมการไคเรตริกซ์ แกนพาราโบลา และความยาวของลาตัสเรกตัม ของสมการพาราโบลา $y^2 - 2y + 12x - 35 = 0$ พร้อมเขียนกราฟ

วิธีทำ จากสมการ $y^2 - 2y + 12x - 35 = 0$ จัดรูปสมการใหม่ จะได้ว่า

$$(y^2 - 2y) = -12x + 35$$

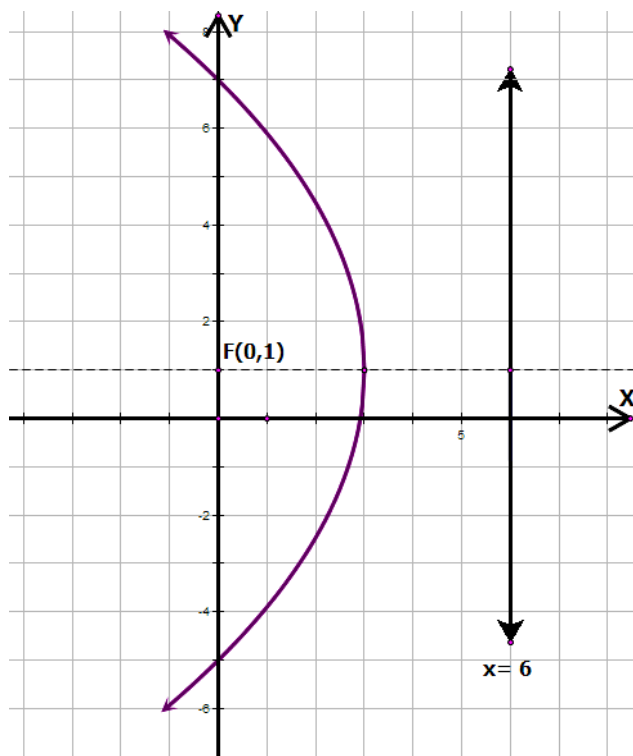
$$(y^2 - 2y + 1^2) = -12x + 35 + 1^2$$

$$(y-1)^2 = -12x + 36$$

$$(y-1)^2 = -12(x-3)$$

$$(y-1)^2 = 4(-3)(x-3)$$

ดังนั้น จะได้ว่า พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(3,1)$ จุดโฟกัสอยู่ที่ $(0,1)$ สมการไคเรตริกซ์ คือ $x=6$ แกนพาราโบลา คือ $y=1$ และความยาวลาคัสเรกตัม เท่ากับ 12 หน่วย และเขียนกราฟได้ ดังนี้



□

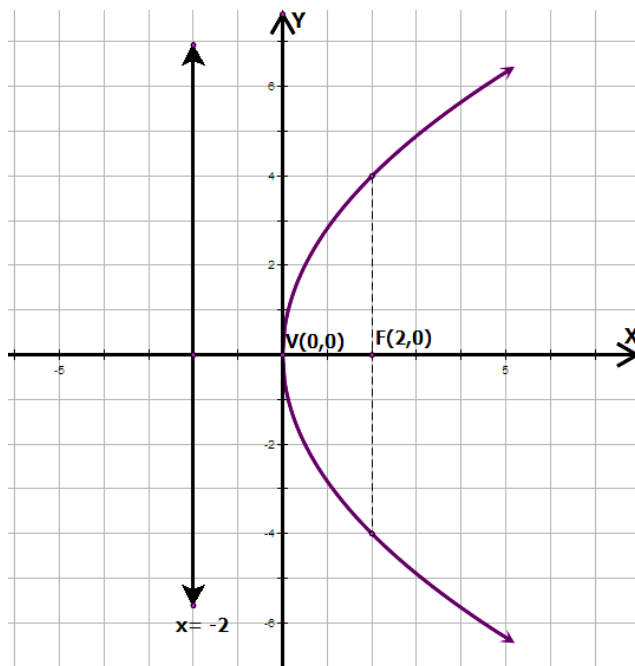
ตัวอย่าง 2.7 จงหาสมการพาราโบลา ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(2,0)$

วิธีทำ จากที่กำหนดให้พาราโบลามีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(2,0)$ แสดงว่าพาราโบลา มีลักษณะตะแคงขวาหรือเปิดด้านขวา ดังนั้น จะได้ว่า $c=2$ และได้ว่า

$$y^2 = 4(2)x$$

$$y^2 = 8x \text{ หรือ } y^2 - 8x = 0 \text{ เป็นสมการของพาราโบลา และ}$$

สามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



□

ตัวอย่าง 2.8 จงหาจุดยอด จุดโฟกัส สมการไดเรกทริกซ์ แกนพาราโบลา และความยาวของ
ลาตัสเรกตัม ของสมการพาราโบลา $y^2 + 2y - 4x + 5 = 0$ พร้อมเขียนกราฟ

วิธีทำ จากสมการ $y^2 + 2y - 4x + 5 = 0$ จัดรูปสมการใหม่ จะได้ว่า

$$(y^2 + 2y) = 4x - 5$$

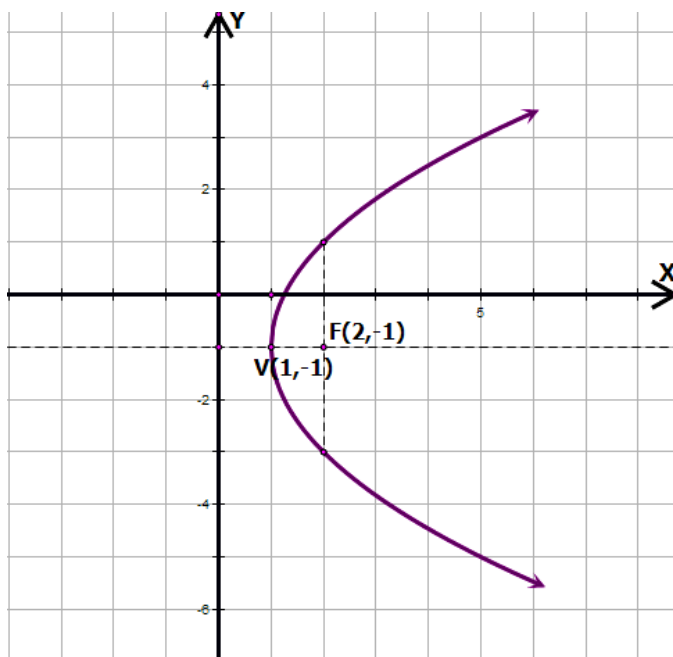
$$(y^2 + 2y + 1^2) = 4x - 5 + 1^2$$

$$(y + 1)^2 = 4x - 4$$

$$(y + 1)^2 = 4(x - 1)$$

$$(y + 1)^2 = 4(1)(x - 1)$$

ดังนั้น พาราโบลามีจุดยอดอยู่ที่ $(1, -1)$ จุดโฟกัสอยู่ที่ $(2, -1)$ สมการไดเรกทริกซ์ คือ $x = 0$ แกนพาราโบลา คือ $y = -1$ และความยาวลาตัสเรกตัม เท่ากับ 4 หน่วย สามารถเขียนกราฟ
ได้ดังนี้



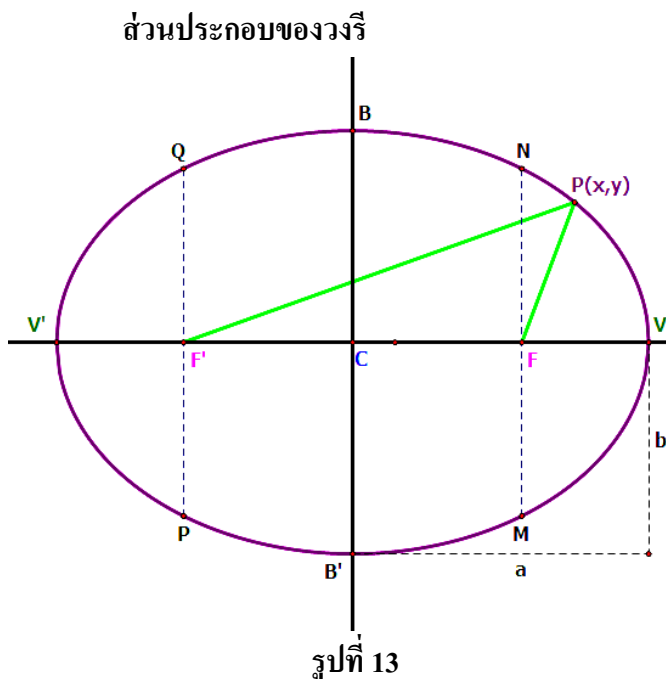
แบบฝึกหัดที่ 2 เรื่องพาราโบลา

1. จงหาสมการพาราโบลา ตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ต่อไปนี้
 - 1.1 มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด มีสมการไดเรกทริกซ์ $x=5$
 - 1.2 มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด ผ่านจุด $(3,5)$ และมีแกน X เป็นแกนพาราโบลา
 - 1.3 จุดยอดอยู่ที่ $(2,-1)$ มีสมการไดเรกทริกซ์ $y=1$
 - 1.4 จุดปลายของลาตัสเรกตัม $(-3,3)$ และ $(-3,-1)$ เป็นพาราโบลารูปเปิดด้านซ้าย

2. จงหาจุดยอด จุดโฟกัส สมการไดเรกทริกซ์ แกนพาราโบลา ของสมการพาราโบลาต่อไปนี้ พร้อมเขียนกราฟ
 - 2.1 $y^2 = 12x$
 - 2.2 $x^2 + 10y = 0$
 - 2.3 $x^2 - 6x - 8y + 17 = 0$
 - 2.4 $y^2 + 26x - 8y - 8 = 0$

3. วงรี (Ellipse)

นิยาม วงรี คือ เซตของจุดบนระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดมีค่าคงตัวเสมอ โดยค่าคงตัวมีค่ามากกว่าระยะระหว่างจุดคงที่ทั้งสอง



1. เรียกจุด C ว่าจุดศูนย์กลาง
2. เรียก V และ V' ว่าจุดยอด
3. เรียก F และ F' ว่าจุดโฟกัส (Focus)
4. เรียก V'V ว่าแกนเอก
5. เรียก B'B ว่าแกนโท
6. เรียก PQ และ MN ว่าลาตัสเรกตัม มีความยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$

รูปแบบของวงรี

รูปแบบของวงรีมี 2 รูปแบบ แต่ละรูปแบบมี 2 ลักษณะและแต่ละลักษณะจะมีรูปสมการที่แตกต่างกัน และรูปสมการได้มาจากนิยามของวงรี จากรูปที่ 13 จะได้ว่า

$$CV = CV' = a \text{ หน่วย}$$

$$CB = CB' = b \text{ หน่วย}$$

$$CF = CF' = c \text{ หน่วย}$$

ดังนั้น ความยาวของแกนเอก $V'V = 2a$ หน่วย

ความยาวของแกนโท $B'B = 2b$ หน่วย

จากนิยาม $PF + PF' =$ ค่าคงตัวค่าหนึ่งเสมอ ไม่ว่าจุด P จะเลื่อนไปที่ใดบนวงรี จากรูปที่ 13 สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้าเลื่อนจุด P ไปทับจุด V จะได้ว่า

$$\begin{aligned} PF + PF' &= VF + VF' \\ &= VF + (VF + FF') \\ &= V'F' + (VF + FF'); VF = V'F' \\ &= V'F' + VF + FF' \\ &= VF + FF' + V'F' \end{aligned}$$

$$= VV'$$

$$\text{ดังนั้น } PF + PF' = 2a; VV' = 2a$$

กรณีที่ 2 ถ้าเลื่อนจุด P ไปที่จุด B จะได้ว่า

$$PF + PF' = 2a$$

$$BF + BF' = 2a$$

$$BF + BF = 2a; BF = BF'$$

$$2BF = 2a$$

$$BF = a$$

จากสามเหลี่ยมมุมฉาก BCF จะได้ว่า

$$(BF)^2 = (BC)^2 + (CF)^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

จะได้ความสัมพันธ์ของระยะทาง a, b และ c โดยที่ $a > 0, b > 0$ และ $c > 0$ ดังนี้

$$a^2 = b^2 + c^2$$

จากความสัมพันธ์ จะได้ว่า $PF + PF' = 2a$ ดังนั้น จะได้ว่า

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{[x-(-c)]^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการ จะได้ว่า

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$-2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2cx$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx \quad \text{ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้ว่า}$$

$$a^2 [(x+c)^2 + y^2] = (a^2 + cx)^2$$

$$a^2 [x^2 + 2xc + c^2 + y^2] = a^4 + 2a^2 cx + c^2 x^2$$

$$a^2 x^2 + 2a^2 xc + a^2 c^2 + a^2 y^2 = a^4 + 2a^2 cx + c^2 x^2$$

$$a^2 x^2 + a^2 c^2 + a^2 y^2 = a^4 + c^2 x^2$$

$$a^2 x^2 - c^2 x^2 + a^2 y^2 = a^4 - a^2 c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2 y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

นำ $a^2(a^2 - c^2)$ หารทั้งสองข้างของสมการ จะได้

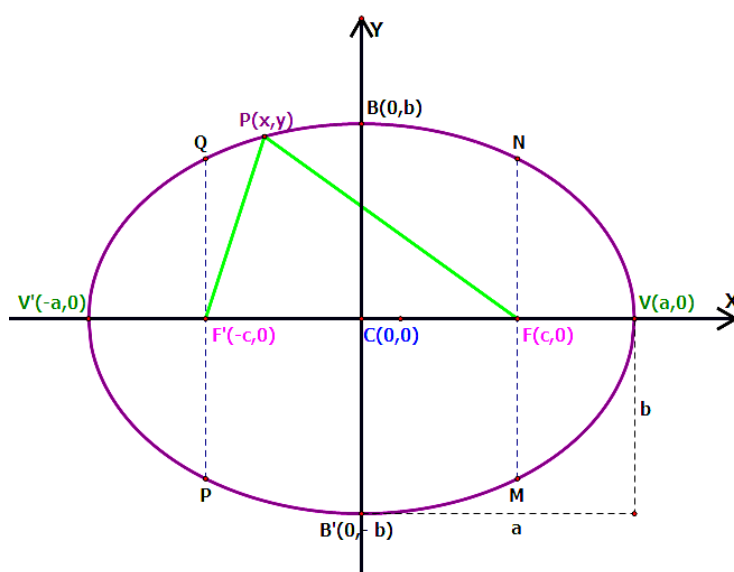
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{เมื่อ } b^2 = a^2 - c^2$$

เป็นสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลา ซึ่งแต่ละรูปแบบก็จะมีรูปสมการที่ต่างกัันดังต่อไปนี้

1. วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$

1.1 วงรีที่มีแกนเอกอยู่บนแกน x จะมีรูปสมการ ดังนี้

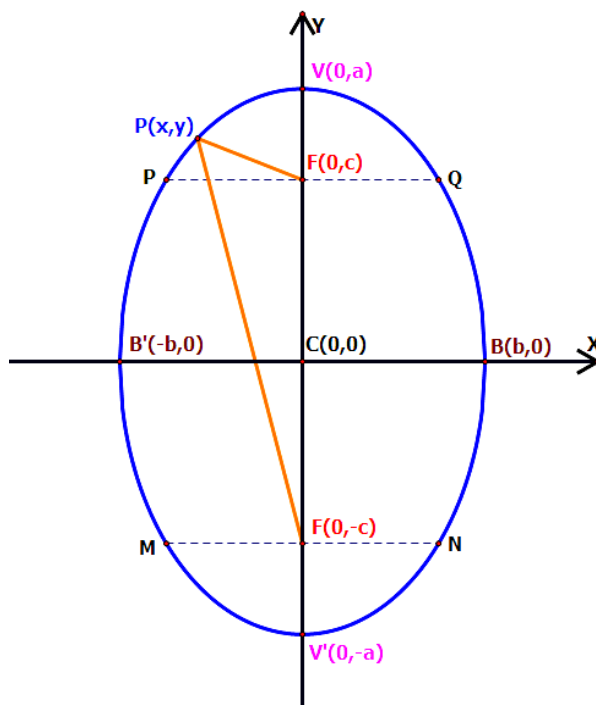
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{เมื่อ } b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad \text{โดยที่ } a > b > 0 \quad \text{ดังรูปที่ 14}$$



รูปที่ 14

1.2 วงรีที่มีแกนเอกอยู่บนแกน y จะมีรูปสมการ ดังนี้

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{เมื่อ } b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad \text{โดยที่ } a > b > 0 \quad \text{ดังรูปที่ 15}$$

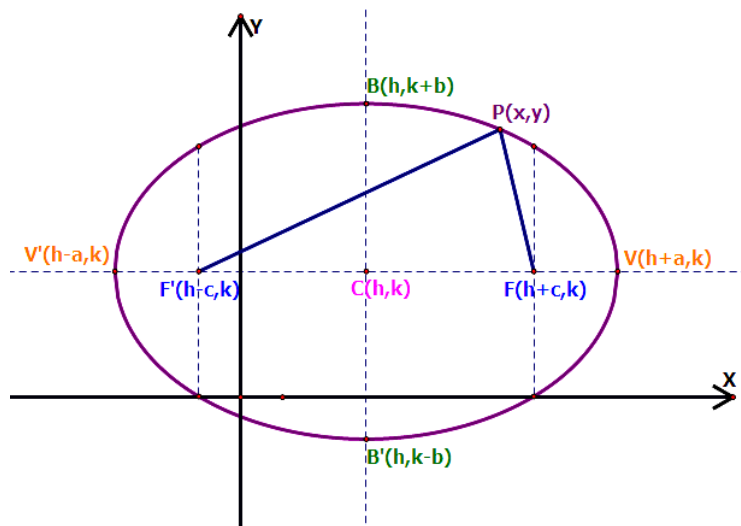


รูปที่ 15

2. วงรีจุดศูนย์กลางก่กลางอยู่ที่จุด (h,k)

2.1 วงรีที่มีแกนเอกขนานอยู่บนแกน x จะมีรูปสมการ ดังนี้

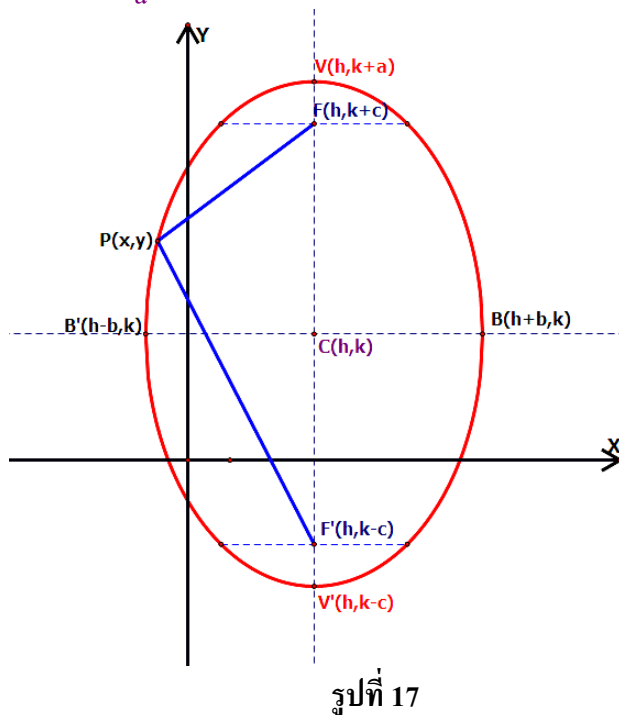
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ เมื่อ } b = \sqrt{a^2 - c^2} \text{ โดยที่ } a > b > 0 \text{ ดังรูปที่ 16}$$



รูปที่ 16

2.2 วงรีที่มีแกนเอกขนานอยู่บนแกน y จะมีรูปสมการ ดังนี้

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \text{ เมื่อ } b = \sqrt{a^2 - c^2} \text{ โดยที่ } a > b > 0 \text{ ดังรูปที่ 17}$$



รูปทั่วไปของสมการวงรี

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \text{ เมื่อ } A \neq B \neq 0 \text{ และ } A \text{ กับ } B \text{ มีเครื่องหมายเหมือนกัน}$$

การเขียนกราฟของวงรี

มีหลักการดังนี้

1. เปลี่ยนรูปทั่วไปของสมการวงรีให้อยู่ในรูปมาตรฐาน เพื่อหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท และความยาวลาตัสเรกตัม
2. เขียนกราฟของวงรีโดยลงจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวลาตัสเรกตัม เขียนเส้นโค้งวงรีผ่านจุดยอด จุดปลายความยาวลาตัสเรกตัมและจุดปลายความยาวแกนโท ตามลำดับ

ข้อควรจำ ในการแก้ปัญหาวงรี ควรเข้าใจสาระสำคัญซึ่งสรุปดังตารางข้างล่างต่อไปนี้

1. วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0)

สมการรูปมาตรฐาน	แกนเอก	แกนโท	จุดยอด	จุดโฟกัส
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	ทับแกน X	ทับแกน Y	$(\pm a, 0)$	$(\pm c, 0)$
$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	ทับแกน Y	ทับแกน X	$(0, \pm a)$	$(0, \pm c)$

สมการ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	สมการ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
1. จุดศูนย์กลาง $C(0,0)$	1. จุดศูนย์กลาง $C(0,0)$
2. จุดยอด $V_1(a,0), V_2(-a,0)$	2. จุดยอด $V_1(0,a), V_2(0,-a)$
3. จุดโฟกัส $F_1(c,0), F_2(-c,0)$	3. จุดโฟกัส $F_1(0,c), F_2(0,-c)$
4. แกนเอกยาว $2a$ และทับแกน X	4. แกนเอกยาว $2a$ และทับแกน Y
5. แกนโทยาว $2b$ และทับแกน Y	5. แกนโทยาว $2b$ และทับแกน X
6. ลาดัสเรกตัมยาว $\frac{2b^2}{a}$	6. ลาดัสเรกตัมยาว $\frac{2b^2}{a}$

2. วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k)

สมการรูปมาตรฐาน	แกนเอก	แกนโท	จุดยอด	จุดโฟกัส
$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	ขนาน แกน X	ขนาน แกน Y	$(h \pm a, k)$	$(h \pm c, k)$
$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	ขนาน แกน Y	ขนาน แกน X	$(h, k \pm a)$	$(h, k \pm c)$

สมการ $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	สมการ $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$
1. จุดศูนย์กลาง $C(h,k)$	1. จุดศูนย์กลาง $C(h,k)$
2. จุดยอด $V_1(h+a,k), V_2(h-a,k)$	2. จุดยอด $V_1(h,k+a), V_2(h,k-a)$
3. จุดโฟกัส $F_1(h+c,k), F_2(h-c,k)$	3. จุดโฟกัส $F_1(h,k+c), F_2(h,k-c)$
4. แกนเอกยาว $2a$ และขนานทับแกน X	4. แกนเอกยาว $2a$ และขนานแกน Y
5. แกนโทยาว $2b$ และขนานแกน Y	5. แกนโทยาว $2b$ และขนานแกน X
6. ลาดัสเรกตัมยาว $\frac{2b^2}{a}$	6. ลาดัสเรกตัมยาว $\frac{2b^2}{a}$

โดยที่ $a > 0, b > 0, c > 0, a > b, a > c$ และ $a^2 = c^2 + b^2$

ตัวอย่าง 3.1 จงหาสมการวงรีที่มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(0,6)$ และ $(0,-6)$ ครึ่งแกนโทยาว 3 หน่วย พร้อมเขียนกราฟ

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ $b=3, F_1=(0,6)$ และ $F_2=(0,-6)$ ทำให้ได้ว่า $c=6$

$$\text{หาค่า } a \text{ จาก } a^2 = b^2 + c^2 \text{ จะได้ว่า } a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$a = \sqrt{3^2 + 6^2}$$

$$a = \sqrt{45}$$

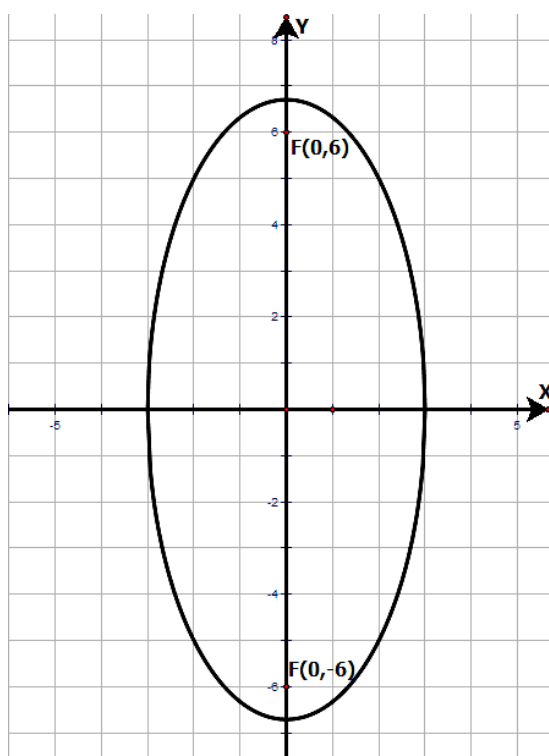
ดังนั้น เขียนให้อยู่ในรูปมาตรฐาน จะได้ว่า $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{\sqrt{45}^2} = 1$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{45} = 1$$

$$45x^2 + 9y^2 = 405$$

$$45x^2 + 9y^2 - 405 = 0 \text{ หรือ } 5x^2 + y^2 - 45 = 0$$

และสามารถเขียนกราฟของสมการวงรีได้ดังนี้



□

ตัวอย่าง 3.2 จงหาสมการวงรี ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$ จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(4,0)$ ความยาวลาตัสเรกตัม 2 หน่วย พร้อมเขียนกราฟ

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$ จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(4,0)$

จะได้ว่า $a=4$ และเนื่องจากความยาวลาตัสเรกตัม เท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$

$$\text{ดังนั้น} \quad 2 = \frac{2b^2}{4}$$

$$b^2 = \frac{2(4)}{2}$$

$$b^2 = 4, \quad b = 2$$

ดังนั้น สมการวงรี คือ $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

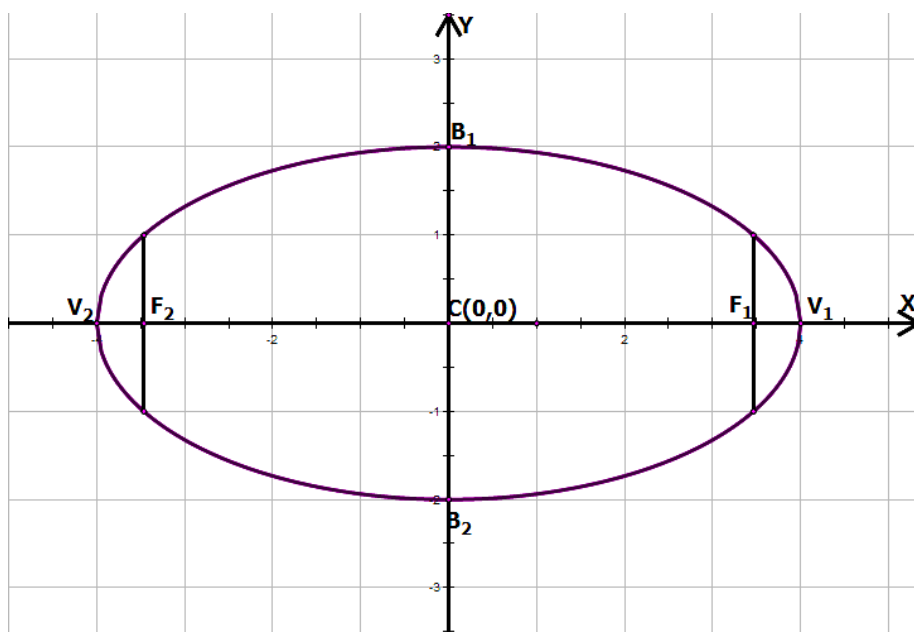
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

คูณด้วย 64 ทั้งสองข้างของสมการ จะได้ $4x^2 + 16y^2 = 64$

$$4x^2 + 16y^2 - 64 = 0 \quad \text{หรือ}$$

$$x^2 + 4y^2 - 16 = 0$$

และเขียนกราฟได้ดังนี้



□

ตัวอย่าง 3.3 จงหาจุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส และจุดยอดของสมการวงรี

$$9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y - 11 = 0 \quad \text{พร้อมเขียนกราฟ}$$

วิธีทำ จากสมการวงรี $9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y - 11 = 0$ เขียนให้อยู่ในรูปมาตรฐาน ดังนี้

$$(9x^2 - 18x) + (4y^2 - 16y) = 11$$

$$9(x^2 - 2x) + 4(y^2 - 4y) = 11$$

$$9(x^2 - 2x + 1^2) + 4(y^2 - 4y + 2^2) = 11 + 9(1^2) + 4(2^2)$$

$$9(x^2 - 2x + 1^2) + 4(y^2 - 4y + 2^2) = 36$$

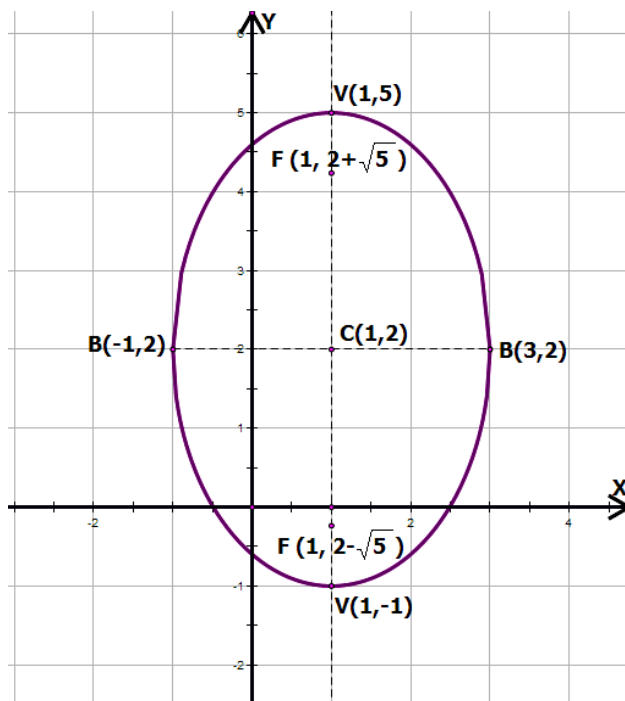
$$9(x-1)^2 + 4(y-2)^2 = 36$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

จากสมการรูปมาตรฐานของวงรี จะได้ว่า $a=3, b=2$ ดังนั้น

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$ ดังนั้นวงรีมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(1, 2)$ จุดโฟกัสอยู่ที่ $(1, 2 + \sqrt{5})$ และ $(1, 2 - \sqrt{5})$ จุดยอดของวงรีอยู่ที่ $(1, 5)$ และ $(1, -1)$ สามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



□

ตัวอย่าง 3.4 จงหาจุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส และจุดยอดของสมการวงรี

$$4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y - 23 = 0 \text{ พร้อมเขียนกราฟ}$$

วิธีทำ จากสมการวงรี $4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y - 23 = 0$ เขียนให้อยู่ในรูปมาตรฐาน ดังนี้

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 2y) = 23$$

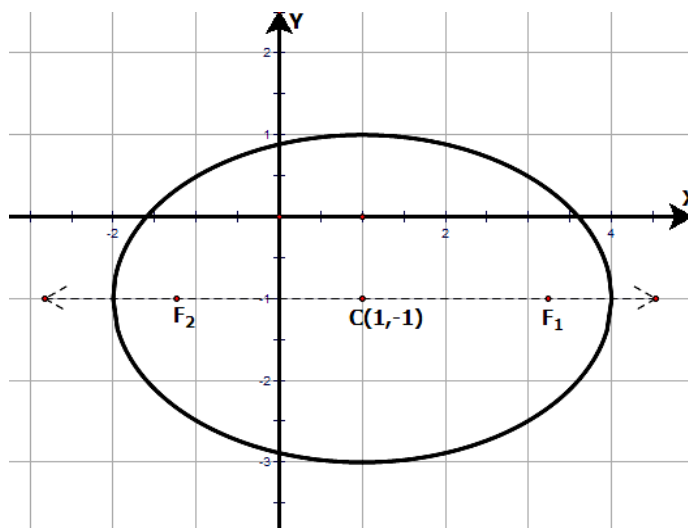
$$4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 + 2y + 1) = 23 + 4 + 9$$

$$4(x-1)^2 + 9(y+1)^2 = 36$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

จากสมการรูปมาตรฐาน $a=3, b=2$ ดังนั้น $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$

นั่นคือ วงรีมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(1, -1)$ จุดโฟกัสอยู่ที่ $(1 + \sqrt{5}, -1), (1 - \sqrt{5}, -1)$ และจุดยอดอยู่ที่ $(-2, -1), (4, -1)$ สามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



□

แบบฝึกหัดที่ 3 เรื่องวงรี (Ellipse)

1. จงหาสมการวงรี เมื่อกำหนดเงื่อนไขให้ดังนี้

1.1 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$ จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(3,0)$ ความยาวลาตัสเรกตัม 4 หน่วย

1.2 จุดยอดอยู่ที่ $(0,3)$ และ $(0,-3)$ จุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(0,2)$

1.3 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(3,-1)$ จุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(3,-1+\sqrt{3})$ จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(3,1)$

1.4 จุดโฟกัสอยู่ที่ $(-2,6)$ และ $(-2,0)$ ความยาวแกนเอก 10 หน่วย

2. จงหาจุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส จุดยอด ความยาวแกนเอกและความยาวแกนโท ของสมการต่อไปนี้ พร้อมเขียนกราฟ

2.1 $4x^2 + 25y^2 = 100$

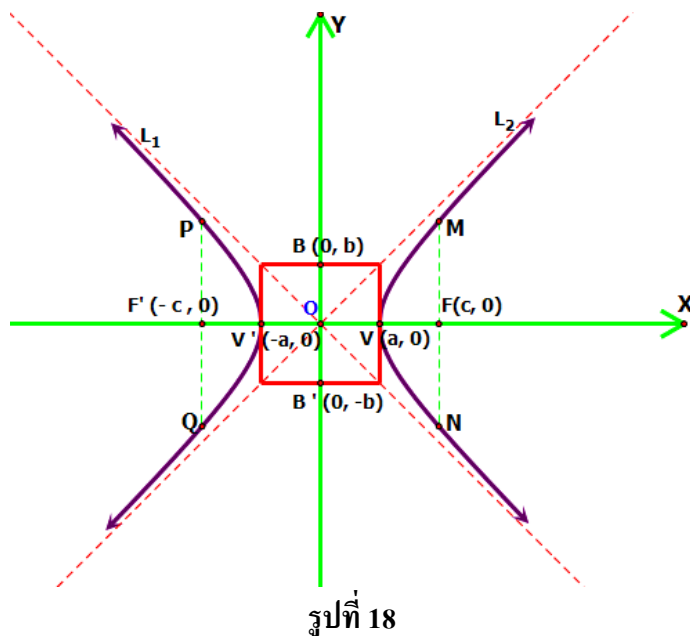
2.2 $16x^2 + y^2 - 16 = 0$

2.3 $x^2 + 9y^2 - 2x - 36y + 28 = 0$

2.4 $49x^2 + 4y^2 - 2x + 2y - 143 = 0$

4. ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)

นิยาม ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของจุดบนระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดบนระนาบจะมีค่าคงตัวเสมอ โดยค่าคงตัวนี้มีค่าน้อยกว่าระยะทางจากจุดคงที่ทั้งสอง



ส่วนประกอบต่าง ๆ ของไฮเพอร์โบลา

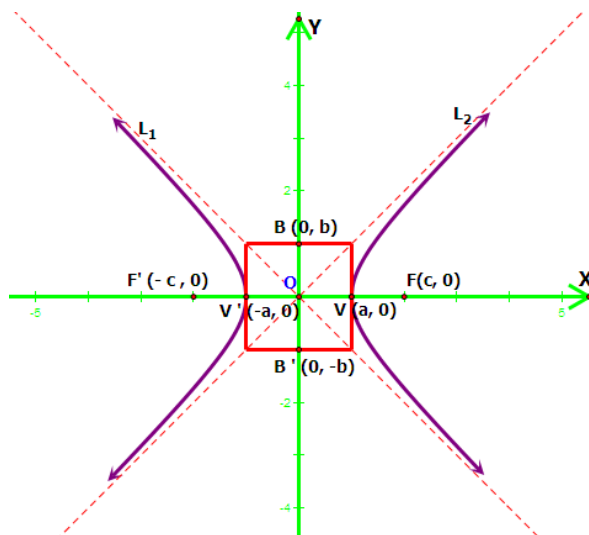
1. เรียกจุด O ว่าจุดศูนย์กลาง
2. เรียกจุด $V'(-a, 0)$ และ $V(a, 0)$ ว่าจุดยอด
3. เรียกจุด $F_1(-c, 0)$ และ $F_2(c, 0)$ ว่าจุดโฟกัส (Focus)
4. เรียก VV' ว่าแกนตามขวาง
5. เรียก BB' ว่าแกนตั้งขยุก
6. เรียก L_1 และ L_2 ว่าเส้นกำกับ
7. เรียก PQ และ MN ว่าลาตัสเรกตัม มีความยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$

รูปแบบของไฮเพอร์โบลา

1. ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0)

1.1 ไฮเพอร์โบลาที่มีแกน x เป็นแกนสมมาตรมีสมการ ดังนี้

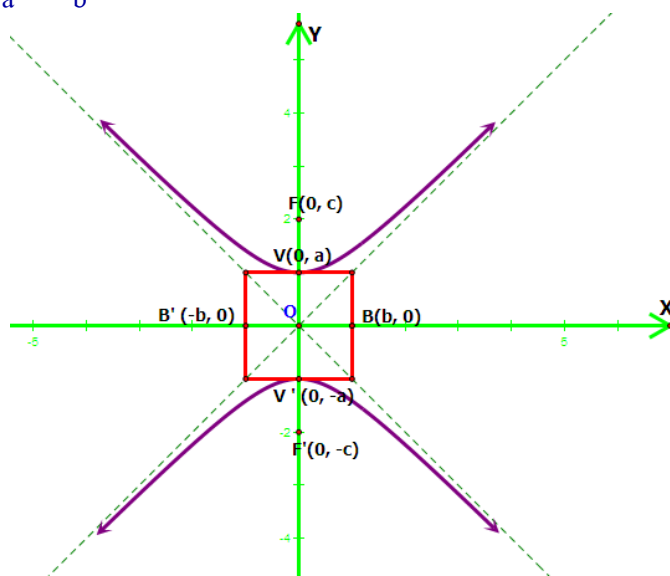
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ เมื่อ } b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ ดังรูปที่ 19}$$



รูปที่ 19

1.2 ไฮเพอร์โบลามีแกน y เป็นแกนสมมาตรมีสมการ ดังนี้

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ เมื่อ } b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ ดังรูปที่ 20}$$

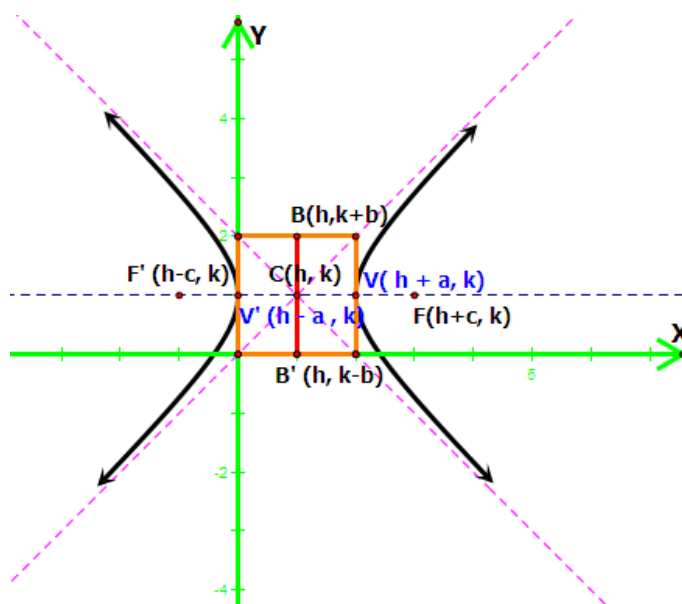


รูปที่ 20

2. ไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k)

2.1 ไฮเพอร์โบลามีแกนสมมาตรขนานแกน x จะมีรูปสมการ ดังนี้

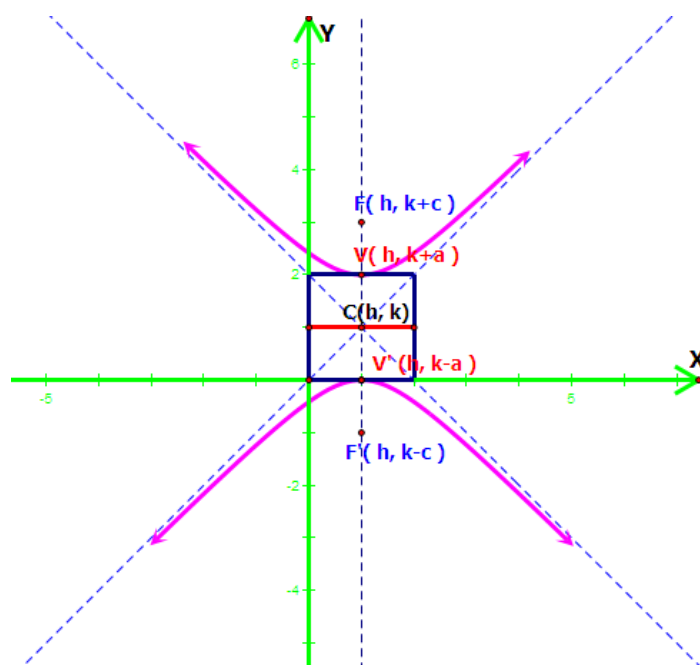
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ เมื่อ } b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ ดังรูปที่ 21}$$



รูปที่ 21

2.2 ไฮเพอร์โบล่าที่มีแกนสมมาตรขนานแกน y จะมีรูปสมการ ดังนี้

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \text{ เมื่อ } b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ ดังรูปที่ 22}$$



รูปที่ 22

รูปทั่วไปของสมการไฮเพอร์โบลา

เมื่อ A, B, C เป็นค่าคงตัวใด ๆ รูปทั่วไปของสมการ ไฮเพอร์โบลา เป็นดังนี้

1. แกนสมมาตรขนานแกน x จะมีรูปสมการ ดังนี้ $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

เมื่อ $A > 0, B < 0$

2. แกนสมมาตรขนานแกน y จะมีรูปสมการ ดังนี้ $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

เมื่อ $A < 0, B > 0$

การเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา

มีหลักการดังนี้

- เปลี่ยนสมการรูปทั่วไปให้อยู่ในรูปมาตรฐาน เพื่อหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวลาตัสเรกตัม ความยาวแกนตามขวาง ความยาวแกนสังยุค สมการเส้นกำกับ
- เขียนกราฟของไฮเพอร์โบลาโดยลงจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวลาตัสเรกตัม ความยาวแกนตามขวาง ความยาวแกนสังยุค และเส้นกำกับตามลำดับ แล้วลากเส้นโค้งไฮเพอร์โบลาผ่านจุดยอด จุดปลายเส้นความยาวลาตัสเรกตัมแนบกับเส้นกำกับ

ข้อควรจำ ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับไฮเพอร์โบลา เราจะต้องทำความเข้าใจและนึกถึงสาระสำคัญเกี่ยวกับไฮเพอร์โบลา ซึ่งสรุปในตารางต่อไปนี้ให้ได้เสมอ คือ

สมการ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	สมการ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
1. จุดศูนย์กลาง $C(0,0)$	1. จุดศูนย์กลาง $C(0,0)$
2. จุดยอด $V_1(a,0), V_2(-a,0)$	2. จุดยอด $V_1(0,a), V_2(0,-a)$
3. จุดโฟกัส $F_1(c,0), F_2(-c,0)$	3. จุดโฟกัส $F_1(0,c), F_2(0,-c)$
4. แกนตามขวางยาว $2a$ และทับแกน X	4. แกนตามขวางยาว $2a$ และทับแกน Y
5. แกนสังยุคยาว $2b$ และทับแกน Y	5. แกนสังยุคยาว $2b$ และทับแกน X
6. ลาตัสเรกตัมยาว $\frac{2b^2}{a}$	6. ลาตัสเรกตัมยาว $\frac{2b^2}{a}$
7. เส้นกำกับ $y = \pm \frac{b}{a}x$	7. เส้นกำกับ $y = \pm \frac{a}{b}x$

สมการ $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	สมการ $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
1. จุดศูนย์กลาง $C(h,k)$	1. จุดศูนย์กลาง $C(h,k)$
2. จุดยอด $V_1(h+a,k), V_2(h-a,k)$	2. จุดยอด $V_1(h,k+a), V_2(h,k-a)$
3. จุดโฟกัส $F_1(h+c,k), F_2(h-c,k)$	3. จุดโฟกัส $F_1(h,k+c), F_2(h,k-c)$
4. แกนตามขวางยาว $2a$ และขนานแกน X	4. แกนตามขวางยาว $2a$ และขนานแกน Y
5. แกนตั้งยุดยาว $2b$ และขนานแกน Y	5. แกนตั้งยุดยาว $2b$ และขนานแกน X
6. ลาดัสเรกตัมยาว $\frac{2b^2}{a}$	6. ลาดัสเรกตัมยาว $\frac{2b^2}{a}$
7. เส้นกำกับ $y-k = \pm \frac{b}{a}(x-h)$	7. เส้นกำกับ $y-k = \pm \frac{a}{b}(x-h)$

โดยที่ $c > a > 0$, $c > b$ และ $c^2 = a^2 + b^2$

ตัวอย่าง 4.1 จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(-3,0)$ และ $(3,0)$ มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(-5,0)$ และ $(5,0)$ พร้อมเขียนกราฟ

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้จุดยอดของไฮเพอร์โบลาอยู่ที่ $(-3,0)$ และ $(3,0)$ ทำให้ได้ค่า $a=3$ และกำหนดจุดโฟกัสอยู่ที่ $(-5,0)$ และ $(5,0)$ ทำให้ได้ค่า $c=5$

ดังนั้น หาค่า b ได้จากสมการ $b^2 = c^2 - a^2$

$$b^2 = 5^2 - 3^2$$

$$b^2 = 25 - 9$$

$$b^2 = 16$$

$$b^2 = 4$$

เนื่องจาก จุดยอดและจุดโฟกัสอยู่บนแกน X ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางอยู่บนแกน X และมีสมการดังนี้

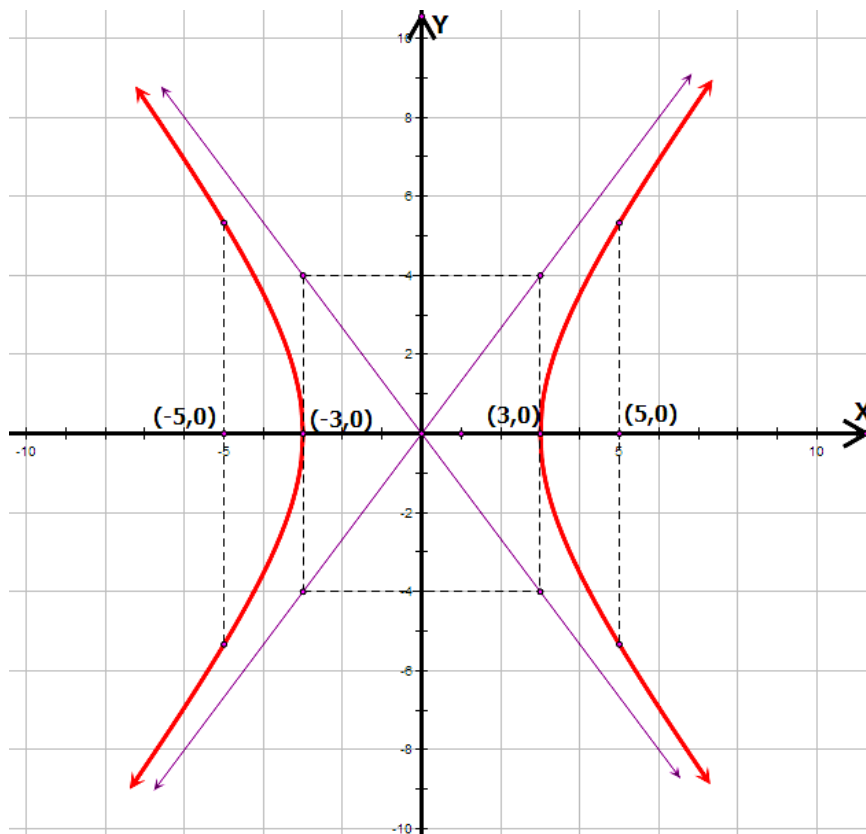
$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

$$9x^2 - 16y^2 - 144 = 0 \text{ และมีสมการเส้นกำกับ คือ } y = \pm \frac{4}{3}x \text{ เขียน}$$

กราฟได้ดังนี้



□

ตัวอย่าง 4.2 จงหาสมการและเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, -3)$ และ $(0, 3)$

มีความชัน เท่ากับ $\frac{1}{2}$

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดจุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, -\sqrt{5})$ และ $(0, \sqrt{5})$ แสดงว่าไฮเพอร์โบลามีแกน

ตามขวางอยู่บนแกน Y ความชันของแกนสังยุค เท่ากับ $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ จะได้ค่า $a=1$ และ $b=2$

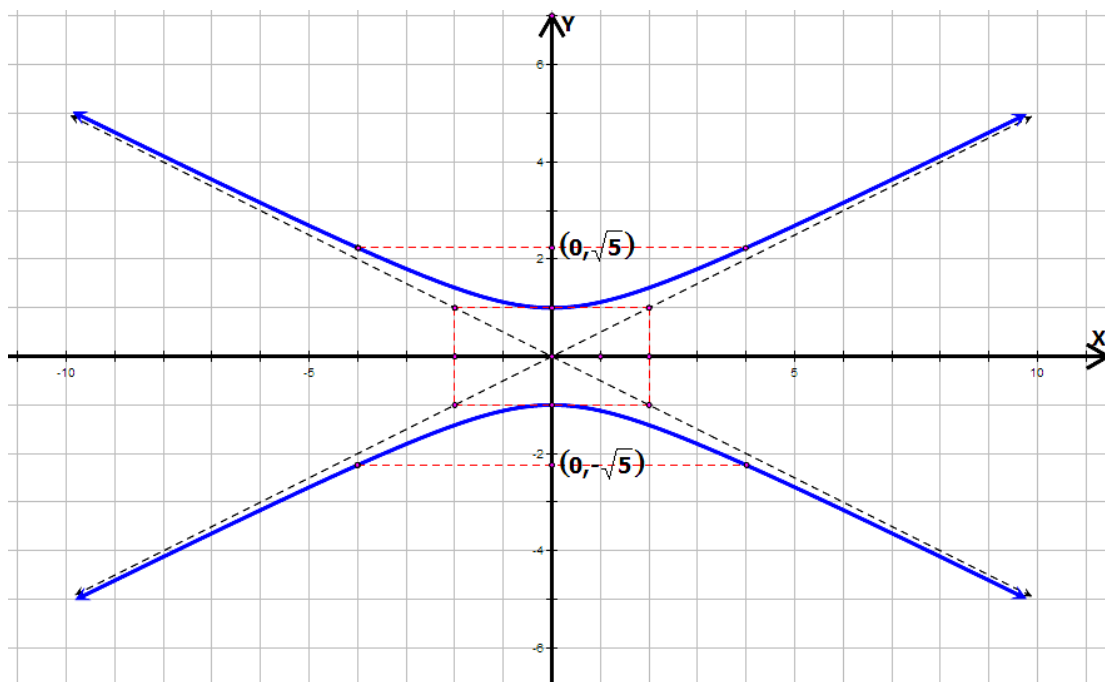
ดังนั้น สมการเส้นกำกับ คือ $y = \pm \frac{1}{2}x$ และสมการของไฮเพอร์โบลา คือ

$$\frac{y^2}{1^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{4} = 1$$

$$4y^2 - x^2 = 4$$

$4y^2 - x^2 - 4 = 0$ และสามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



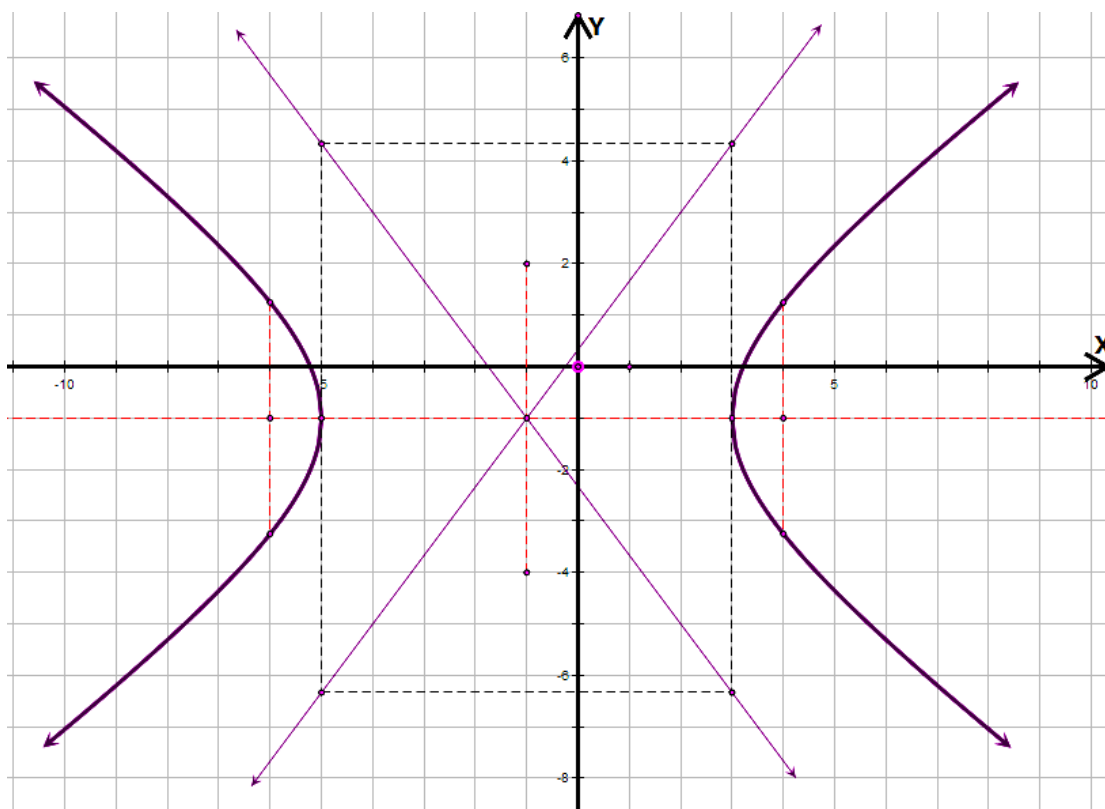
□

ตัวอย่าง 4.3 จงหาสมการและเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-1, -1)$ แกนตามขวางขนานแกน X ยาว 8 หน่วย และแกนตั้งยุค ยาว 6 หน่วย

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ แกนตามขวางขนานแกน X ยาว 8 หน่วย จะได้อ่า $a=4$ และแกนตั้งยุค ยาว 6 หน่วย จะได้อ่า $b=3$ และได้อ่า $c=\sqrt{16+9}=5$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น สมการของไฮเพอร์โบลา คือ } & \frac{(x+1)^2}{4^2} - \frac{(y+1)^2}{3^2} = 1 \\ & \frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1 \\ & 9(x+1)^2 - 16(y+1)^2 = 144 \\ & 9(x^2 + 2x + 1) - 16(y^2 + 2y + 1) = 144 \\ & 9x^2 + 18x + 9 - 16y^2 - 32y - 16 = 144 \\ & 9x^2 + 18x - 16y^2 - 32y + 9 - 16 - 144 = 0 \\ & 9x^2 + 18x - 16y^2 - 32y - 151 = 0 \end{aligned}$$

เขียนกราฟได้ดังนี้



ตัวอย่าง 4.4 จงหาจุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส จุดยอด และสมการเส้นกำกับ ของสมการไฮเพอร์โบลา $y^2 - 4x^2 + 20y - 8x + 92 = 0$ พร้อมเขียนกราฟ

วิธีทำ จากสมการ $y^2 - 4x^2 + 20y - 8x + 92 = 0$ จัดให้อยู่ในรูปมาตรฐาน ดังนี้

$$\begin{aligned} (y^2 + 20y) - (4x^2 + 8x) &= -92 \\ (y^2 + 20y + 100) - 4(x^2 + 2x + 1) &= -92 + 100 - 4 \\ (y + 10)^2 - 4(x + 1)^2 &= 4 \\ \frac{(y + 10)^2}{4} - \frac{(x + 1)^2}{1} &= 1 \end{aligned}$$

จากสมการรูปมาตรฐาน หาค่า c จะได้ว่า $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

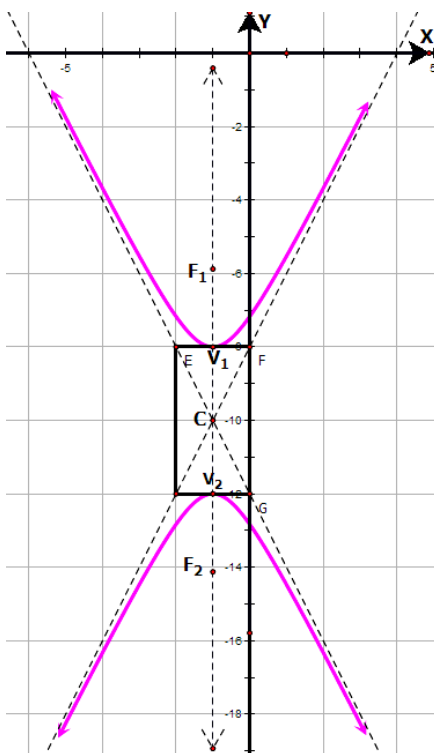
นั่นคือ ไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(h, k) = (-1, -10)$ จุดยอดอยู่ที่

$V(h, k \pm a) = (-1, -8), (-1, -12)$ จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(h, k \pm c) = (-1, -10 - \sqrt{5}),$

$(-1, -10 + \sqrt{5})$ และจากสมการเส้นกำกับ คือ $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$ เท่ากับ

$y + 10 = \pm \frac{2}{1}(x + 1)$ ดังนั้นสมการเส้นกำกับ คือ $y = 2x - 8$ และ $y = -2x - 12$ สามารถ

เขียนกราฟได้ดังนี้



แบบฝึกหัดที่ 4 เรื่องไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)

1. จงหาสมการไฮเพอร์โบลา เมื่อกำหนดเงื่อนไขให้ดังนี้
 - 1.1 จุดยอดอยู่ที่ $(-2,0)$ และ $(2,0)$ จุดโฟกัสอยู่ที่ $(-5,0)$ และ $(5,0)$
 - 1.2 จุดโฟกัสอยู่ที่ $(1,3)$ และ $(-2,3)$ มีความชันเส้นกำกับ เท่ากับ $\frac{3}{2}$
 - 1.3 จุดโฟกัสอยู่ที่ $(0,-6)$ และ $(0,6)$ จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่ $(-2,0)$ และ $(2,0)$
 - 1.4 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(4,5)$ แกนตามขวางยาว 8 หน่วย และขนานกับแกน X แกนสังยุคยาว 4 หน่วย
2. จงหาจุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส จุดยอด สมการเส้นกำกับ ความยาวลาตัสเรกตัม ความยาวแกนตามขวาง ของสมการไฮเพอร์โบลาที่กำหนดให้ดังนี้ พร้อมเขียนกราฟ
 - 2.1 $16y^2 - 25x^2 = 460$
 - 2.2 $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 41 = 0$
 - 2.3 $y^2 - 4x^2 - 8y + 8x + 16 = 0$