บทที่ 2

# การประยุกต์โปรแกรมจีเอสพี (GSP) ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เหมาะสมมีความสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาศักยภาพของ ผู้เรียนทั้งด้านด้านทักษะและกระบวนการ การใช้โปรแกรมจีเอสพี (GSP) ในบางรายวิชาทาง คณิตศาสตร์อาจช่วยให้ผู้เรียนมองความเป็นนามธรรมเป็นรูปธรรมที่ชัดเจนมากขึ้นโดยไม่ต้อง จินตนาการมากมาย แต่เดิมการเรียนวิชาคณิตศาสตร์หากใครไม่มีทั้งศาสตร์และศิลป์จะเข้าใจเนื้อหา ทางด้านคณิตศาสตร์ยากมาก ดังนั้นหากสามารถสร้างสื่อประกอบการสอนที่เหมาะสำหรับผู้เรียนที่มี ความสามารถแตกต่างกันก็จะเพิ่มผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติที่ดีต่อการเรียนได้เป็นอย่างดี

## 2.1 แนะนำโปรแกรมจีเอสพี (GSP) ส่วนประกอบและการฝึกใช้เครื่องมือเบื้องต้น

โปรแกรมจีเอสพี เป็นสื่อเทคโนโลยีที่ช่วยให้ผู้เรียน มีโอกาสเรียนคณิตศาสตร์โดยการสร้าง องค์ความรู้ด้วยตนเอง (Constructivist Approach) และเป็นการเรียนโดยเน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ (Learner-Centered Learning) เป็นสื่อที่ช่วยให้ผู้เรียนพัฒนาทักษะของการนึกภาพ (Visualization) ทักษะของกระบวนการแก้ปัญหา (Problem Solving Skills) นอกจากนี้ การใช้โปรแกรมจีเอสพี ใน การเรียนการสอนคณิตศาสตร์เป็นการบูรณาการสาระที่เกี่ยวข้องกับความรู้คณิตศาสตร์ และทักษะ ด้านเทคโนโลยีเข้าด้วยกันทำให้ผู้เรียนมีโอกาสพัฒนาพหุปัญญาอันได้แก่ ปัญญาทางภาษา ด้าน ตรรกศาสตร์ ด้านมิติสัมพันธ์ และด้านศิลปะ ด้วยเหตุผลดังกล่าว โปรแกรมจีเอสพี จึงได้รับรางวัล ยอดเยี่ยมหลายรางวัล อาทิเช่น Best Educational Software of All Time จาก Stevens Institute of Technology Survey of Mentor Teachers และ Most Valuable Software for Students จาก National Survey of Mathematics Teachers, USA.

โปรแกรมจีเอสพี มีใช้อย่างแพร่หลายกว่า 50 ประเทศทั่วโลกอีกทั้งบรรจุอยู่ในหลักสูตร วิชาคณิตศาสตร์ระดับต่างๆ ถึง 10 ประเทศ เช่น สิงคโปร์ มาเลเซีย ญี่ปุ่น จีน อังกฤษ อเมริกา เป็นต้น นอกจากนี้ได้มีการแปลซอฟต์แวร์โปรแกรมจีเอสพี เป็นภาษาต่างๆ ถึง 14 ภาษา ได้แก่ ฝรั่งเศส สเปน เดนมาร์ก เกาหลี ญี่ปุ่น รัสเซีย นอร์เวย์ ฟินด์แลนด์ อาหรับ เชคโก เปรู เยอรมัน จีน และอังกฤษ สำหรับผู้เริ่มใช้โปรแกรมจีเอสพี เมื่อเปิดโปรแกรมจะปรากฏหน้าต่างแสดงลิขสิทธิ์ของ สสวท. ดังรูปที่ 2.1.1



รูปที่ 2.1

จากนั้นจะแสดงสถานะ สสวท. มอบลิขสิทธิ์สำหรับใช้ในหน่วยงานที่ขอใช้ ดังรูปที่ 2.1.2



รูปที่ 2.2

จากนั้นจะปรากฏแผ่นงานเหมือนโปรแกรม Microsoft Office ซึ่งประกอบด้วยแถบเครื่องมือ และแถบเมนู ดังรูปที่ 2.1.3





ในแผ่นงานดังกล่าวจะสามารถสร้างผลงานหรือสร้างสื่อประกอบการสอน เพื่อให้ผู้เรียนใช้ หรือให้ผู้เรียนลงมือปฏิบัติด้วยตนเองได้ ซึ่งผู้สร้างผลงานจะต้องมีความรู้เกี่ยวกับกับการแปลงทาง เรขาคณิต ได้แก่การเลื่อนขนาน การสะท้อน การหมุน การย่อขยาย และการทำซ้ำ ดังนี้

### การเลื่อนขนาน (Translation)

การเลื่อนขนานต้องมีรูปต้นแบบ ทิศทางและระยะทางที่ต้องการเลื่อนรูป การเลื่อนขนาน เป็นการแปลงที่จับคู่จุดแต่ละจุดของรูปต้นแบบกับจุดแต่ละจุดของรูปที่ได้จากการเลื่อนรูปต้นแบบ ไปในทิศทางใดทิศทางหนึ่งด้วยระยะทางที่กำหนด จุดแต่ละจุดบนรูปที่ได้จากการเลื่อนขนานจะ ห่างจากจุดที่สมนัยกันบนรูปต้นแบบเป็นระยะทางเท่ากัน การเลื่อนในลักษณะนี้เรียกอีกอย่างหนึ่ง ว่า "สไลด์ (slide)" ดังตัวอย่างในรูปที่ 2.1.4 และรูปที่ 2.1.5



รูปที่ 2.1.4



รูปที่ 2.1.5





- **ตัวอย่าง 2.1.2** การฝึกใช้เครื่องมือการเลื่อนขนานด้วยระยะทางคงที่ และมุมคงที่ ตัวอย่างการเลื่อนขนานด้วยระยะทางคงที่และมุมคงที่เพื่อสร้างรูปเรขาคณิต ดังนี้
  - 1. น้ำจุดอิสระมา 1 จุด จาก click เลือกจุดอิสระ ดังรูป



 2. ไปเมนูการแปลง → เลือกคำสั่ง เลื่อนขนาน จะแสดงกล่องเครื่องมือ จากนั้นให้เติม จำนวนในช่องระยะทางคงที่ 5 ซม. และมุมคงที่ 0 องศา ดังรูป

เลือนขนาน	×
วกเตอร์ของกา (∙ิเชิงชั่ว (	ารเสื่อนขนาน: C สีเหลี่ยมมุมฉาก C ตามก็ระบุ
ดย: (จิระยะทางร	<b>พที่ C</b> ระยะทางที่ระมุ
	5 231.
ก็: (* มุมคงที่	C มุมที่ระบุ
	•
วิธีใช้	ยกเลิก เลื่อนขนาน

สร้างส่วนของเส้นตรง โดยเลือกจุด 2 จุด → เมนูสร้าง เลือกคำสั่งส่วนของเส้นตรง
 จากนั้นเลือกส่วนของเส้นตรงและจุด → เมนูการแปลง เลือกคำสั่งเลื่อนขนาน ดังรูป

🛞 แฟ้ม	แก้ไข	แสดงผล	สร้าง	การแปลง	การวัด	กราฟ	หน้าต่าง	ารใช้
<b>▶</b> , • • • • • • • • • • • • • • • • • • •				<b>ระบุจ</b> ระบุม ระบุม ระบุม ระบุม	เด <b>ซุนย์กล</b> ส้นสะท้อน เม วัดราส่วน วกเตอร์ ะะยะทาง	ŀŝ	Shift+Ctr	I+F
A ,				เลื่อน หมุน ย่อ/ข สะท้อ	เขนาน  ยาย เน			
				•		_		

เติมจำนวนในช่องระยะทางคงที่ 5 ซม. และมุมคงที่ 90 องศา ดังรูป

	การเลื่อนขนาน
••	เวกเตอร์ของการเสื่อนขนาน: <ul> <li>เชิงชั่ว</li> <li>เชิงชั่ว</li> <li>เชิงชั่ว</li> <li>เชิงชั่ว</li> </ul>
	-โดย: โระยะทางคงที่ C ระยะทางทีระบุ 5.0 ซม.
••	-ที่:
	วิธีใช้ ยกเลิก เสื้อนขนาน

5. จากสร้างส่วนของเส้นตรงเพิ่มให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและสร้างบริเวณภายในให้ได้ดังรูป



#### การสะท้อน (reflection)

การสะท้อนต้องมีรูปต้นแบบที่ต้องการสะท้อนและเส้นสะท้อน (reflection line หรือ Missor line) การสะท้อนรูปข้ามเส้นสะท้อนเสมือนกับการพลิกรูปข้ามเส้นสะท้อนหรือการดูเงา สะท้อนบนกระจกเงาที่วางบนเส้นสะท้อน การสะท้อนเป็นการแปลงที่มีการจับคู่กันระหว่างจุด แต่ละ จุดบนรูปต้นแบบกับจุดแต่ละจุดบนรูปสะท้อน โดยที่

 รูปที่เกิดจากการสะท้อนมีขนาดและรูปร่างเช่นเดิม หรือกล่าวว่ารูปที่เกิดจากการ สะท้อนเท่ากันทุกประการกับรูปเดิม

 เส้นสะท้อนจะแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดแต่ละจุดบน รูปต้นแบบกับจุดแต่ละจุดบนรูปสะท้อนที่สมนัยกัน นั่นคือ ระยะระหว่างจุดต้นแบบและเส้นสะท้อน เท่ากับระยะระหว่างจุดสะท้อนและเส้นสะท้อน



จากรูป รูปสามเหลี่ยม ล'в'с' เป็นรูปสะท้อนของรูปสามเหลี่ยม ABC ข้ามเส้นสะท้อน m รูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยม ล'в'с' ส่วนของเส้นตรง ลล'ตั้งฉาก กับเส้นสะท้อน m ที่จุด P และระยะจากจุด A ถึงเส้น m เท่ากับระยะจากเส้น m ถึงจุดล' (AP = PA')

## ตัวอย่าง 2.1.3 การฝึกใช้เครื่องมือการสะท้อน





8. เลือกส่วนของเส้นตรงด้านรูปหลายเหลี่ยมจริงถึงเส้นสะท้อน→เมนูการวัด→
 ความยาว และเลือกส่วนของเส้นตรงด้านหนึ่งของเส้นสะท้อนถึงรูปหลายเหลี่ยมใหม่ แล้ว
 เปรียบเทียบ

#### การหมุน (Rotation)

การหมุนจะต้องมีรูปต้นแบบ จุดหมุนและขนาดของมุมที่ต้องการในรูปนั้น การหมุนเป็น การแปลงที่จับคู่จุดแต่ละจุดของรูปต้นแบบกับจุดแต่ละจุดของรูปที่ได้จากการหมุน โดยที่จุดแต่ละจุด บนรูปต้นแบบเคลื่อนที่รอบจุดหมุนด้วยขนาดของมุมที่กำหนด จุดหมุนจะเป็นจุดที่อยู่นอกรูปหรือบน รูปก็ได้ การหมุนจะหมุนทวนเข็มนาฬิกาหรือตามเข็มนาฬิกาก็ได้ โดยทั่วไปเมื่อไม่ระบุไว้การหมุนรูป จะเป็นการหมุนทวนเข็มนาฬิกา

บางครั้งถ้าการหมุนตามเข็มนาฬิกา อาจใช้สัญลักษณ์ –x° หรือ ถ้าการหมุนทวนเข็ม นาฬิกา อาจใช้สัญลักษณ์ x°

> จากรูป เป็นการหมุนรูปสามเหลี่ยม ABC ใน ลักษณะทวนเข็มนาฬิกา โดยมีจุด O เป็นจุดหมุน ซึ่งจุดหมุนเป็นจุดที่อยู่นอกรูปสามเหลี่ยม ABC รูป A'B'C' เป็นรูปที่ได้จากการหมุน 90° และ จะได้ว่า ขนาดของมุม AO A' เท่ากับ 90°



во в'

\_\_\_\_\_ co c'



4. Double Click จุด B และเลือกจุด A → เมนูการแปลง → หมุน เติมจำนวน -20
 →หมุน Click จุด C → เมนูการแปลง → หมุน เติมจำนวน 20 → หมุน แล้วสร้างส่วนของ
 เส้นตรงระหว่างจุด 2 จุด ดังรูป



5. Double Click จุด D เลือกจุด E → เมนูการแปลง → หมุน เติมจำนวน 60 → หมุน และสร้างส่วนของเส้นตรงระหว่างจุด ดังรูป



7. Double Click จุด 0 → Click จุด 0 และ B → เมนูสร้าง → วงกลมที่สร้าง จากจุดศูนย์กลางและจุดอื่น

B. Double Click จุด 0 → Click จุด 0 และ C → เมนูสร้าง → วงกลมที่สร้าง
 จากจุดศูนย์กลางและจุดอื่น ซึ่งจะปรากฏรูปดังนี้



# การย่อขยาย (Dilation) และการทำซ้ำ (Interacting)

การทำซ้ำ คือการสร้างการแปลงรูปต้นแบบหนึ่งหรือหลายขั้นตอน การทำซ้ำสามารถใช้ สร้างรูปต้นแบบที่ซับซ้อน เช่น เทสเซลเลชัน และแฟร็กทัล

### ตัวอย่าง 2.1.5 การย่อขยายและการทำซ้ำ

เราสามารถใช้คำสั่งในเมนูการแปลง เช่น การย่อ/ขยาย การหมุน การทำซ้ำ สร้างรูปการ แตกกิ่งของต้นไม้ แบบแยกทีละ 2 กิ่งได้ ดังวิธีการต่อไปนี้

> สร้างมุม ×yz เพื่อใช้กำหนดและเปลี่ยนขนาดมุมของกิ่งไม้ โดยใช้เครื่องมือสร้าง ส่วนของเส้นตรงที่อยู่ในกล่องเครื่องมือ



- สร้างต้นไม้กิ่งเริ่มต้นของกิ่งไม้โดยสร้างส่วนของเส้นตรง AB ในแนวตั้ง มีความยาว พอสมควร
- 3. ย่อ/ขยายจุด B ด้วยอัตราส่วน <sup>3</sup>/<sub>−</sub> โดยระบุจุด A เป็นจุดศูนย์กลาง

	ข่อ/ขยาย 🔀
в	ย่อ/ขยายด้วย: <ul> <li>อัตราส่วนคงที่</li> <li>วัตราส่วนที่ระบุ</li> </ul>
•	2
	รอบจุดศูนย์กลาง A
A	วิธีใช้ ยกเลิก ย่อ/ชยาย

- 4. เลือกจุด <sub>B</sub> และคำสั่ง ย่อ/ขยาย จะได้จุด <sup>B</sup>
- 5. หมุนจุด B' ไปตามมุมที่ระบุคือมุม xyz และมุม zyx (คลิกเลือกจุดตามลำดับ ชื่อมุม) โดยมีจุด B เป็นจุดศูนย์กลางการหมุนจะได้จุด c และ D



- *6*. ซ่อนจุด <sup>*i*</sup>
- 7. สร้างส่วนของเส้นตรง <sub>BC</sub> และ <sub>BD</sub> จะได้กิ่งของต้นไม้
- 8. ทำซ้ำกิ่งของต้นไม้ไปทางซ้ายและทางขวาโดยเลือกจุด A และ B
- เลือกคำสั่งทำซ้ำ จากเมนูการแปลงที่กล่องโต้ตอบ คลิกเลือกจุด <sub>B</sub> เพื่อกำหนดเป็นภาพแรกของต้นแบบ <sub>A</sub>

คลิกเลือกจุด <sub>D</sub> เพื่อกำหนดเป็นภาพแรกของต้นแบบ <sub>B</sub>

в

ท่าซ้ำ		
<u>ภาพต้นแบบ</u>	<u>ไปยัง</u>	<u>ภาพแรก</u>
А	⇒	В
В	⇒	D
จำนวนการทำเ	ช้า: 3.	
แสดงผล	<b>•</b>	โครงสร้าง 🔻
วรไข้	ยกเลิก	ทำซ้ำ

ในกล่องโต้ตอบ เลือกกดปุ่ม โครงสร้าง แล้วเลือกเพิ่มการส่งใหม่ คลิกเลือกจุด <sub>B</sub> เพื่อกำหนดเป็นภาพแรกของต้นแบบ <sub>A</sub> คลิกเลือกจุด <sub>C</sub> เพื่อกำหนดเป็นภาพแรกของต้นแบบ <sub>B</sub> เลือกกดปุ่มทำซ้ำ จะได้รูปกิ่งไม้



- เพิ่มรูปกิ่งไม้ด้วย เลือกรูปกิ่งไม้ทั้งหมด แล้วกดแป้นเครื่องหมาย + เพื่อเพิ่มจำนวนกิ่ง
   ไม้ หรือกดแป้นเครื่องหมาย เพื่อลดจำนวนกิ่งไม้
- 11. โยกปรับขนาดมุม xyz แล้วสังเกตรูปที่ได้



## 2.2 การสร้างสื่อประกอบเนื้อหาคณิตศาสตร์ 2 มิติ

## 2.2.1 การสร้างสื่อประกอบการสอนทฤษฎีบทพีทาโกรัส (Pythagorean Theorem)

ในวิชาคณิตศาสตร์ **ทฤษฏีบทพีทาโกรัส** แสดงความสัมพันธ์ใน เรขาคณิตแบบยุคลิด ระหว่างด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมมุมฉาก ทฤษฏีนี้ถูกตั้งชื่อเพื่อเป็นเกียรติแก่พีทาโกรัส นัก คณิตศาสตร์ชาวกรีก แม้ว่าความจริงแล้ว ได้มีการคิดค้นทฤษฏีนี้ขึ้นก่อนหน้าที่เขาจะมีชีวิตอยู่ โดย ชาวอินเดียชาวกรีก ชาวจีน และชาวบาบิโลน

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส กล่าวไว้ว่า "ผลรวมของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประชิดมุม ฉากทั้งสอง จะเท่ากับ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก"



จากรูป จะสังเกตว่า ผลรวมของพื้นที่ของสี่เหลี่ยมสีเหลืองและสีน้ำเงิน จะเท่ากับ พื้นที่ของ สี่เหลี่ยมสีเขียว เราสามารถเขียนทฤษฎีบทนี้ให้อยู่ในรูป สมการ

	_
!	7
	2
2 2 2	2
$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$	1
	I
1	ı
L	I.

โดยที่ a และ b เป็นความยาวด้านประชิดมุมฉากทั้งสองของสามเหลี่ยมมุมฉาก และ c เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก

## บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส

บทกลับของทฤษฎีบทปีทาโกรัสนั้นเป็นจริง โดยกล่าวไว้ดังนี้

"กำหนด a, b และ c เป็นจำนวนจริงบวก ที่ a<sup>2</sup> + b<sup>2</sup> = c<sup>2</sup> จะมีสามเหลี่ยมมุมฉากหนึ่ง รูปที่มีความยาวด้าน เป็นจำนวนสามจำนวนนั้น และด้านที่มีความยาว a และ b จะเป็นด้าน ประกอบมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมนั้น"

บทกลับนี้ยังปรากฏอยู่ในหนังสือ Euclid's Elements ของยุคลิดด้วย โดยบทกลับนี้สามารถ พิสูจน์ได้โดยใช้ กฏของโคไซน์ หรือตามการพิสูจน์ดังต่อไปนี้ กำหนดสามเหลี่ยม ABC มีด้านสามด้านที่มีความยาว a, b และ c และ a<sup>2</sup> + b<sup>2</sup> = c<sup>2</sup> เราจะต้องพิสูจน์ว่ามุมระหว่าง a และ b เป็นมุมฉาก ดังนั้น เราจะสร้างสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี ความยาวของด้านประกอบมุมฉาก เป็น a และ b แต่จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส เราจะได้ว่าด้านตรง ข้ามมุมฉาก ของสามเหลี่ยมรูปที่สองก็จะมีค่าเท่ากับ c เนื่องจากสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีความยาว ด้านเท่ากันทุกด้าน สามเหลี่ยมทั้งสองรูปจึง<u>เท่ากันทุกประการ</u>แบบ "ด้าน-ด้าน-ด้าน" และต้องมีมุม ขนาดเท่ากันทุกมุม ดังนั้นมุมที่ด้าน a และ b มาประกอบกัน จึงต้องเป็นมุมฉากด้วย

จากบทพิสูจน์ของบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส เราสามารถนำไปหาว่ารูปสามเหลี่ยมใด ๆ เป็นสามเหลี่ยมมุมแหลม, มุมฉาก หรือ มุมป้าน ได้ เมื่อกำหนดให้ c เป็นความยาวของด้านที่ยาว ที่สุดในรูปสามเหลี่ยม

ถ้า a<sup>2</sup> + b<sup>2</sup> = c<sup>2</sup> สามเหลี่ยมนั้นจะเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ถ้า a<sup>2</sup> + b<sup>2</sup> < c<sup>2</sup> สามเหลี่ยมนั้นจะเป็นสามเหลี่ยมมุมแหลม ถ้า a<sup>2</sup> + b<sup>2</sup> > c<sup>2</sup> สามเหลี่ยมนั้นจะเป็นสามเหลี่ยมมุมป้าน

วิธีพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัสของ เลโอนาร์โด ดา วินชี



# ตัวอย่าง 2.2.1 การสร้างสื่อประกอบทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad

#### การสร้างรูปสามเหลี่ยมพีทาโกรัสต้นแบบ

 สร้างรูปสามเหลี่ยมพีทาโกรัส โดยลงจุดอิสระ 1 จุด เลื่อนขนานจุดต้นแบบด้วยระทางคงที่ มุมคงที่ 90 องศา และ 180 องศา ตามลำดับ ดังรูป



 สร้างรังสี ของด้านประกอบมุมฉาก โดยเลือกจุดต้นแบบ และจุดที่เลื่อนขนานไปที่ 90 องศา ไปเมนูการสร้าง → สร้างรังสี ดังรูป





สร้างรังสี ของด้านประกอบมุมฉาก โดยเลือกจุดต้นแบบ และจุดที่เลื่อนขนานไปที่ 180
 องศา ไปเมนูการสร้าง → สร้างรังสี ดังรูป

🕭 Th	💊 The Geometer's Sketchpad - [แพ้มฮังไม่มีชื่อ 1]										
🙆 uř	ես ա	ก้ไข	แสดงผล	สร้าง	การแปลง	การวัด	กราฟ	หน้าต่าง	วิธีใช้		
$\overline{}$											
$\overline{}$											
$\frac{1}{\Delta}$											
<b>•••</b>											
											จุดตนแบบ
										• •	

 สร้างจุดบนรังสี และสร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุดบนรังสี จากนั้นซ่อนรังสีและจุด
 จุดที่เลื่อนขนานจากจุดต้นแบบ จากนั้นสร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุดต้นแบบกับจุดบนรังสี ทั้งสอง จะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ดังรูป







## กิจกรรมจิกซอพีทาโกรัส

 จากรูปสามเหลี่ยมพีทาโกรัสต้นแบบ เลื่อนขนานจุด A ด้วยระยะทางคงที่ 1 เซนติเมตร มุม คงที่ 0 องศา และเลื่อนขนานจุด B ด้วยระยะทางคงที่ 1 เซนติเมตร มุมคงที่ –90 องศา ดังรูป



2. เลือกจุดที่เลื่อนขนานจุด A ด้วยระยะทางคงที่ 1 เซนติเมตร มุมคงที่ 0 องศา และส่วนของ
 เส้นตรง AA' เมนูสร้าง →เส้นขนาน → จากนั้นเลือกจุดที่เลื่อนขนานจุด B ด้วยระยะทางคงที่ 1
 เซนติเมตร มุมคงที่ -90 องศา และส่วนของเส้นตรง AC → เมนูสร้าง → เส้นขนาน ดังรูป



3. ย่อรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสด้าน BC ให้เล็กกว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส AB จากนั้นสร้างจุดตัดระหว่าง
 เส้นขนาน และด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ยาวด้าน AB ที่เหลือ และซ่อนเส้นขนาน ดังรูป



4. สร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า จำนวน 4 รูป และสร้างบริเวณ ภายในของรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่ารูปละสีที่แตกต่างกัน พร้อมรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านยาว BC ดังรูป



5. นำจุดอิสระไปวางไว้ในบริเวณว่าง และเลื่อนขานรูปทั้ง 5 รูป ด้วยวิธีการระบุเวกเตอร์ ให้ได้



ดังรูป

## กิจกรรมพิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

1. ใช้รูปสามเหลี่ยมพีทาโกรัสต้นแบบ และตั้งชื่อจุด ดังรูป



 2. สร้างเส้นตรงผ่านจุด FG และจุด ED จากนั้นสร้างจุดตัดระหว่างเส้นตรงทั้งสอง ตั้งชื่อ จุดตัดว่าจุด O ดังรูป



 สร้างจุดบนเส้นตรงทั้งสอง ตั้งชื่อว่าจุด P และจุด Q ตามลำดับ จากนั้นเลื่อนขนานจุด P ด้วยเวกเตอร์ GF จะได้จุด P' และเลื่อนขนานจุด Q ด้วยเวกเตอร์ DE จะได้จุด Q' จากนั้นสร้างส่วนของ เส้นตรง PP' และ QQ' ตามลำดับ ดังรูป



4. สร้างส่วนของเส้นตรง AP', BP, BQ และ CQ' พร้อมสร้างบริเวณภายใน ดังรูป



5. เลือกจุด B และส่วนของเส้นตรง AA' ตามลำดับ → สร้างเส้นตั้งฉาก → เลือกเส้นขนาน และส่วนของเส้นตรง AC → สร้างจุดตัด → เลือกเส้นตั้งฉาก และส่วนของเส้นตรง A'C' → สร้างจุดตัด และตั้งชื่อเป็นจุด R และจุด S ตามลำดับ จากนั้นซ่อนเส้นตั้งฉาก และเส้นตรงทั้งสองเส้น ดังรูป



 สร้างส่วนของเส้นตรง BT และจุดบนส่วนของเส้นตรง BT ชื่อว่าจุด U→ เลื่อนขนานจุด U ด้วย เวกเตอร์ ST เป็นจุด V → สร้างส่วนของเส้นตรง UV → สร้างของเส้นตรง UC, UA, VC' และ VA' → สร้างบริเวณภายใน และซ่อนส่วนของเส้นตรง BT จะได้ดังรูป



 สร้างปุ่มแสดงการทำงานเพื่อพิสูจน์ให้ให้ว่าพื้นที่ด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับ พื้นที่ด้านประกอบมุม ฉากรวมกัน ตามพิทาโกรัสกล่าวไว้ ดังรูป



## 2.2.2 การสร้างสื่อประกอบการสอนเรื่องภาคตัดกรวย

การสร้างสื่อเพื่ออธิบายความหมายหรือนิยามของเส้นโค้งที่เกิดจากการเอาระนาบตัด กรวยในลักษณะที่แตกต่างกัน พิจารณา 4 เส้นโค้ง คือ วงกลม พาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา

## สื่อประกอบนิยามวงกลม (Circle)

**นิยาม** วงกลม คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบที่มีระยะห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่ง เป็น ระยะทางคงที่ เรียกจุดคงที่ว่า จุดศูนย์กลาง (Centre) และระยะทางคงที่ว่า รัศมี (Radius)

ร**ูปวงกลม** (Circle) เป็นรูปร่างพื้นฐานอันหนึ่งในเรขาคณิตแบบยุคลิด รูปวงกลมเป็น <u>โลกัส</u> (locus) ของจุดทุกจุดบนระนาบที่มีระยะห่างคงตัวกับจุดที่กำหนดอีกจุดหนึ่ง ระยะห่างนั้นเรียกว่า รัศมี และจุดที่กำหนดเรียกว่าจุดศูนย์กลาง สามจุดใดๆ ที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จะสามารถวาดรูป วงกลมผ่านทั้งสามจุดได้เพียงวงเดียว

#### การสร้างสื่อประกอบนิยามดังกล่าว จะดำเนินการดังนี้

กำหนดพารามิเตอร์ r =3 ซม. โดยไปที่เมนูกราฟ → พารามิเตอร์ใหม่ → พิมพ์ r และ
 เดิม 3 เลือกหน่วยเป็นเซนติเมตร

นาจุดอิสระมาวาง ตั้งชื่อเป็นจุด C → เลือกจุด C และพารามิเตอร์ r → เมนูสร้าง
 วงกลมที่สร้างจากจุดศูนย์กลางและรัศมี จะได้วงกลมดังรูป



3. ลงจุด P บนเส้นรอบวง โดยเลือกเส้นรอบวง → เมนูสร้างจุดบนวงกลม ตั้งชื่อเป็นจุด P
 → ซ่อนเส้นรอบวง → เลือกจุด P → เมนูแก้ไข ปุ่มแสดงการทำงาน → การเคลื่อนไหว →
 เลือกจุด P → เมนูแสดงผล → สร้างรอย ดังรูป



## สื่อประกอบนิยามพาราโบลา (Parabola)

**นิยาม** พาราโบลา คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งและอยู่ห่าง จากเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากันเสมอ



การสร้างพาราโบลาประกอบนิยามดังกล่าว ได้ดังนี้

1. สร้างส่วนของเส้นตรง AB โดยกำหนดจุดอิสระ 2 จุด คือ จุด A และจุด B ในแนวระนาบ 🔶

เลือกจุด A และจุด B → เมนูสร้าง → ส่วนของเส้นตรง → สร้างจุดบนส่วนของเส้นตรง ตั้งชื่อว่า จุด E

2. สร้างเส้นตั้งฉากที่จุด E กับเส้นตรง AB โดยเลือกจุด E และเส้นตรง AB

 3. น้ำจุดอิสระมาวางเหนือเส้นตรง AB ตั้งชื่อว่าจุด F → เลือกจุด F และจุด E → เมนูสร้าง ส่วนของเส้นตรง → เมนูสร้างจุดกึ่งกลางส่วนของเส้นตาง EF ตั้งชื่อว่าจุด D → เลือกจุด D และ ส่วนของเส้นตรง EF → เมนูสร้างเส้นตั้งฉาก

 สร้างจุดตัดของเส้นตั้งฉากทั้งสอง ตั้งชื่อเป็นจุด P→ เลือกจุด P → เมนูแสดงผล → สร้างรอย

5. เลือกจุด E → เมนูแก้ไข → ปุ่มแสดงการทำงาน → การเคลื่อนไหวจุด E หรือถ้า ต้องการสร้างโลคัส ให้เลือกจุด E และจุด P → เมนูสร้าง → โลคัส

#### สื่อประกอบนิยามวงรี (Ellipse)

**นิยาม** วงรี คือ เซตของจุดบนระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ ในเซตนี้ไปยังจุด คงที่สองจุดมีค่าคงตัวเสมอ โดยค่าคงตัวมีค่ามากกว่าระยะระหว่างจุดคงที่ทั้งสอง

การสร้างวงรีประกอบนิยามดังกล่าว ได้ดังนี้

 สร้างส่วนของเส้นตรง AB โดยเลือกส่วนของเส้นตรงอิสระ → กด shift แล้วลากส่วนของ เส้นตรง AB → เมนูสร้างจุดบนส่วนของเส้นตรง ตั้งชื่อว่าจุด C → ช่อนส่วนของเส้นตรง AB → สร้าง ส่วนของเส้นตรง AC และส่วนของเส้นตรง CB

2. นำจุดอิสระมาวาง 2 จุด ในแนวระนาบ ตั้งชื่อเป็นจุด F₁ และจุด F₂ ตามลำดับ → สร้าง
 วงกลมโดยเลือกจุด F₁ กับส่วนของเส้นตรง AB → เมนูสร้างวงกลม และสร้างวงกลมอีกวงโดยเลือก
 จุด F₂ กับส่วนของเส้นตรง CB → เมนูสร้างวงกลม ดังรูป



- 3. สร้างจุดตัดวงกลมทั้งสอง ตั้งชื่อว่าจุด D และจุด E ตามลำดับ
- 4. สร้างส่วนของเส้นตรง F₁D และ DF₂
- 5. สร้างส่วนของเส้นตรง F₁E และ EF₂
- 6. วัดความยาวของส่วนของเส้นตรง F<sub>1</sub>D, DF<sub>2</sub>, F<sub>1</sub>E และ EF<sub>2</sub>

7. คำนวณ ความยาวของส่วนของเส้นตรง F<sub>1</sub>D + ความยาวของส่วนของเส้นตรง DF<sub>2</sub> และ ความยาวของส่วนของเส้นตรง F<sub>1</sub>E + ความยาวของส่วนของเส้นตรง EF<sub>2</sub>



8. สร้างรอยจุด D และ จุด E โดยเลือกจุด D และจุด E → เมนูแสดงผล → สร้างรอย เลือกจุด C → เมนูแก้ไข → ปุ่มแสดงการทำงาน → การเคลื่อนไหว



## สื่อประกอบนิยามไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)

**นิยาม** ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของจุดบนระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดนี้ไปยังจุดคงที่ สองจุดบนระนาบจะมีค่าคงตัวเสมอ โดยค่าคงตัวนี้มีค่าน้อยกว่าระยะทางจากจุดคงที่ทั้งสอง

การสร้างไฮเพอร์โบลาประกอบนิยามดังกล่าว ได้ดังนี้

 1. สร้างส่วนของเส้นตรง AB โดยเลือกส่วนของเส้นตรงอิสระ→ กด shift แล้วลากส่วนของ เส้นตรง AB→ เมนูสร้างจุดบนส่วนของเส้นตรง ตั้งชื่อว่าจุด C → ซ่อนส่วนของเส้นตรง AB → สร้างส่วนของเส้นตรง AC และส่วนของเส้นตรง CB 2. กำหนดจุดอิสระ 2 จุด ในแนวระนาบ ตั้งชื่อเป็นจุด F₁ และ F₂ ตามลำดับ → สร้าง
 วงกลมโดยเลือกจุด F₁ กับส่วนของเส้นตรง AB → เมนูสร้างวงกลม และสร้างวงกลมอีกวงโดยเลือก
 จุด F₂ กับส่วนของเส้นตรง CB → เมนูสร้างวงกลม ดังรูป



3. นำจุดอิสระมาวางบนเส้นรอบวงวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางเป็น F₁ ตั้งชื่อจุด D → เลือกจุด
 D และจุด F₂ → เมนูสร้างส่วนของเส้นตรง → เลือกส่วนของเส้นตรง DF₂ → สร้างจุดกึ่งกลาง
 ตั้งชื่อว่าจุด E → เลือกจุด E และส่วนของเส้นตรง DF₂ → เมนูสร้างเส้นตั้งฉาก ดังรูป



สร้างเส้นตรงผ่านจุด D และจุด F₁ ไปตัดเส้นตั้งฉาก →สร้างจุดตัด ตั้งชื่อว่าจุด P →
 เลือกจุด P→ เมนูแสดงผล → สร้างรอย→เลือกจุด D → แก้ไขปุ่มแสดงการทำงาน →
 การเคลื่อนไหวจุด D ดังรูป



- 5. สร้างส่วนของเส้นตรง  $F_1P$  และ  $F_2P$
- 6. วัดความยาวของส่วนของเส้นตรง F<sub>1</sub>P และ F<sub>2</sub>P
- 7. คำนวณ หาระยะทางของ | F₁P F₂Pl โดยไปที่เมนูการวัด→ คำนวณ ป้อนฟังก์ชัน



8. พิจารณาค่าที่ได้จากการคำนวณ โดยคลิกปุ่มแสดงการเคลื่อนไหวจุด D แล้วพบว่า สอดคล้องกับนิยามอย่างไร

### 2.3 การเขียนกราฟด้วยโปรแกรมจีเอสพี (GSP)

การเขียนกราฟของฟังก์ชันในหัวข้อนี้จะแบ่งเป็น 2 ส่วน ตามระบบพิกัด ได้แก่ ระบบพิกัดฉาก คือ การเขียนกราฟเส้นตรงและการเขียนกราฟเส้นโค้ง และระบบพิกัดเชิงขั้ว

## 2.3.1 การเขียนกราฟในระบบพิกัดฉาก

การเขียนกราฟในระบบพิกัดฉาก ลักษณะของกราฟจะมี 2 ลักษณะ คือ เส้นตรง และเส้น โค้ง กราฟที่มีลักษณะเป็นเส้นตรง จะมีสมการในรูปทั่วไป คือ Ax + By + C = 0 และสมการที่มี ลักษณะเป็นเส้นโค้ง จะมีรูปแบบอื่นๆ ที่ตัวแปรมีเลขชี้กำลังตั้งแต่ 2 ขึ้นไป หรือเขียนอยู่ในรูปฟังก์ชัน อดิศัย เช่น  $x^2 + y^2 - 16 = 0$ ,  $e^{2x} = y$ ,  $\log x = y$ ,  $\sin x + \cos x = y$  เป็นต้น

การเขียนกราฟของฟังก์ชันในโปรแกรมจีเอสพี สิ่งสำคัญคือ ต้องเปลี่ยนรูปสมการให้อยู่ใน รูป y=f(x) หรือ x=f(y) เสมอ ซึ่งเรียกว่าเป็นฟังก์ชันชัดแจ้ง (Plicit Function) เช่น จากสมการ x<sup>2</sup> + y<sup>2</sup> − 16 = 0 เปลี่ยนเป็น y = ± √16 − x<sup>2</sup> จากนั้นใส่ค่าทีละค่าลงในกล่องโต้ตอบในเมนูกราฟ (เขียนกราฟของฟังก์ชันใหม่) ดังรูป



## 2.3.2 การเขียนกราฟในระบบพิกัดเชิงขั้ว

การเขียนกราฟในระบบพิกัดเชิงขั้วทำได้เช่นเดียวกับการเขียนกราฟในระบบพิกัดฉาก ซึ่ง ต้องเปลี่ยนสมการให้อยู่ในรูป r = f(θ) หรือ θ = f(r) และเลือกรูปแบบกริดเป็นแบบเชิงขั้ว จากนั้น สามารถเขียนกราฟโดยไปที่เมนูกราฟและเขียนกราฟของฟังก์ชันใหม่ ป้อนค่าฟังก์ชันที่ต้องการเขียน กราฟโดยเลือกจากตัวเลือกที่กำหนดให้ทางขวามือของกล่องโต้ตอบ ดังรูป

- ไปเมนูกราฟ → พารามิเตอร์ใหม่ ป้อนค่า a = 4 และ b = 3
- เขียนกราฟของฟังก์ชันใหม่ → เปลี่ยนสมการให้อยู่ในรูป r = f(0)
- 3) ป้อนฟังก์ชั้น 2 \* sin(a \*  $\theta$ ) + b \* cos(a \*  $\theta$ ) ตกลง
- น้ำจุดอิสระมาวางบนกราฟ→ เลือกจุดอิสระและจุดกำเนิด → เมนูสร้าง → ส่วนของ เส้นตรง→ เลือกส่วนของเส้นตรง →เมนูสร้าง → โลคัส



### 2.4 การสร้างสื่อในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ

การสร้างสื่อในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ สิ่งสำคัญคือต้องลงเครื่องมือ 3D Tools ก่อน ซึ่งในตัว โปรแกรมจะยังไม่มี เมื่อลงเครื่องมือ 3D Tools เรียบร้อยแล้วสามารถเรียกใช้งานได้ในเครื่องมือ กำหนดเอง ดังรูป



สำหรับการใช้งานเครื่องมือ 3D Tools เราอาจสร้างระนาบเพื่อเก็บไว้ใช้ในการสร้างสื่อต่างๆ ได้ เพื่อดูลักษณะของรูปร่างในระนาบที่แตกต่างกัน ต่อไปนี้จะเป็นขั้นตอนในการสร้างระนาบซึ่งประกอบ ไปด้วยระนาบ XY ระนาบ XZ และระนาบ YZ ดังนี้

 1) ต้อง Setup 3D และลงแกน XYZ ก่อน โดยน้ำจุดอิสระมาวางบนแผ่นงาน →
 3D Tools → Setup 3D จากนั้นน้ำจุดที่อยู่ตรงปลายลูกศรไปวางทับจุดอิสระที่น้ำมาวางครั้ง แรก จะปรากฏเครื่องมือดังรูปทางซ้ายมือ และ 3D Tools → xyz - Axes วางเครื่องมือและ ปรับความยาวของแกน เลือกปุ่มคำสั่ง Isometric จะปรากฏเครื่องมือดังรูปทางขวามือ



2) กระทำการทดลองหมุน pitch roll และ spin เพื่อหามุมที่ทำให้ได้ 3 ระนาบที่ ต้องการ ซึ่งถ้าต้องการสร้างระนาบ XY จะต้องเคลื่อนที่ pitch ไปที่ 180 องศา roll ไปที่ 90 องศา และ spin ไปที่ 90 องศา ถ้าต้องการระนาบ XZ จะต้องเคลื่อนที่ pitch ไปที่ 90 องศา roll ไปที่ 90 องศา และ spin ไปที่ 90 องศา ถ้าต้องการระนาบ YZ จะต้องเคลื่อนที่ pitch ไปที่ 90 องศา roll ไปที่ 90 องศา และ spin ไปที่ 90 องศา ถ้าต้องการระนาบ YZ จะต้องเคลื่อนที่ pitch ไปที่ 90 องศา roll ไปที่ 90 องศา และ spin ไปที่ 0 องศา เพื่อง่ายต่อการสร้างระนาบควรสร้างวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับความ ยาวของ pitch roll และ spin ตามลำดับ และเลื่อนขนานจุดศูนย์กลางตามองศาที่ระบุ ดังรูป



3) สร้างปุ่มแสดงการทำงานการเคลื่อนที่ตามระนาบที่ต้องการ และสร้างปุ่มการ นำเสนอพร้อมกันในแต่ละระนาบ ดังรูป



4) จัดรูปแบบใหม่ให้ดูสวยงาม พร้อมลงจุดหนึ่งหน่วย โดยไปที่ ▶ 3D Tools →
 plot(x,y,z) เลือกพารามิเตอร์ที่สอดคล้องกับจุดหนึ่งหน่วยในแต่ละแกน คือ แกน X (1,0,0) แกน Y
 (0,1,0) และแกน Z (0,0,1) จะได้จุดดังรูปและนำไปเป็นระนาบต้นแบบในการสร้างสื่อต่างๆ



การสร้างรูปเรขาคณิตอย่างง่าย สามารถใช้วิธีการแปลงโดยการระบุเวกเตอร์ และการลงจุด ดังรูปข้างล่าง



สำหรับเทคนิคการลงจุด คือต้องมีพารามิเตอร์ที่เป็นตัวเลขของอั้นดับที่เป็นส่วนประกอบของ จุดที่ต้องลงจุด จากนั้นใช้คำสั่ง plot(x,y,z) กระทำการเลือกตัวเลขที่เป็นส่วนประกอบตามลำดับก็จะ ปรากฏจุดที่ต้องการ

## 2.4.1 การเขียนกราฟไม่กำหนดโดเมน

การเขียนกราฟในระนาบพิกัดฉาก 3 มิติ