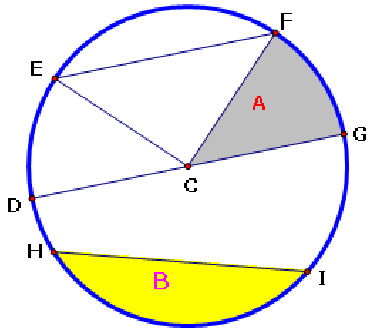
ภาคตัดกรวย (Conic Sections)

1. วงกลม (Circle)

วงกลม เกิดขึ้นจากการตัดกรวยกลมตรงด้วยระนาบที่ตั้งฉากกับแกนของกรวย

นิยาม วงกลม คือ เซตของจุดบนระนาบซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบ เป็นระยะทางเท่ากันเสมอเรียกจุดคงที่ว่า จุดศูนย์กลางและเรียกระยะทางที่เท่ากันว่ารัศมีของวงกลม

ส่วนประกอบของวงกลม



รูปที่ 1.1

C	คือ จุดศูนย์กลาง
DG	คือ เส้นผ่านศูนย์กลาง
CF, CE, CG, CD	คือ รัศมี
HI, EF	คือ คอร์ด

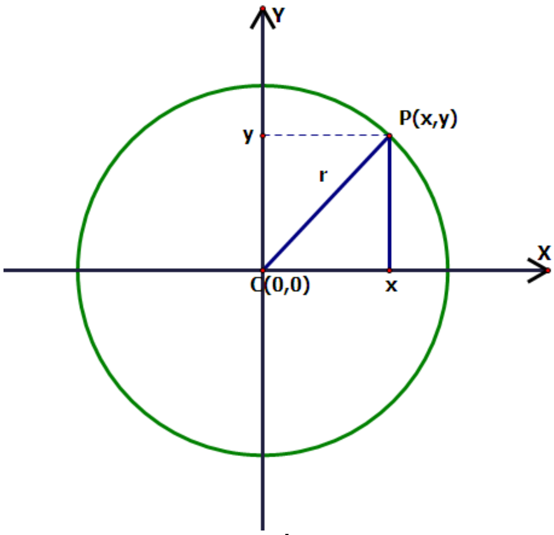
พื้นที่ A เรียกว่า เซคเตอร์

พื้นที่ B เรียกว่าเซคเมนต์

รูปแบบของสมการวงกลม

1. วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$ รัศมียาว r หน่วย จะมีรูปสมการ ดังนี้

$x^2 + y^2 = r^2$ ดังรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2

โดยรูปสมการได้มาจากการหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด จากรูปที่ 1.2 จะได้ว่า

$$\left|\overline{CP}\right| = r$$

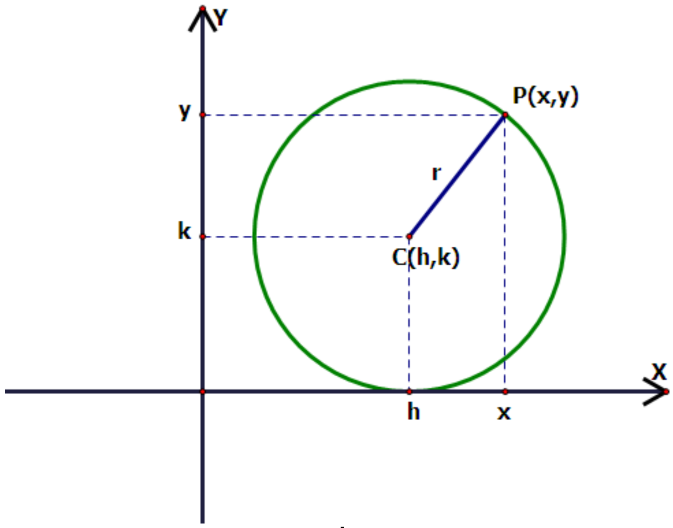
$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=r$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=r$$

ดังนั้น $$x^2+y^2=r^2$$ #

2. วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k) รัศมียาว r หน่วย จะมีรูปสมการ ดังนี้

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ดังรูปที่ 1.3



รูปที่ 1.3

โดยรูปสมการได้มาจากการหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด จากรูปที่ 1.3 จะได้ว่า

$$\left|\overline{CP}\right|=r$$

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

ดังนั้น $$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$ #

รูปทั่วไปของสมการวงกลม

รูปทั่วไปสมการวงกลม ได้จากการกระจายของสมการ

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$\left(x^2-2xh+h^2\right)+\left(y^2-2yk+k^2\right)=r^2$$

$$x^2+y^2-2xh-2yk+h^2+k^2-r^2=0$$

$$x^2+y^2-(2h)x-(2k)y+\left(h^2+k^2-r^2\right)=0$$

ดังนั้น จะได้รูปทั่วไปของสมการวงกลม คือ $x^2+y^2+Ax+By+C=0$
เมื่อ A, B, C เป็นค่าคงที่

จากรูปสมการ $x^2+y^2-(2h)x-(2k)y+\left(h^2+k^2-r^2\right)=0$ จะได้ว่า

ถ้ากำหนดให้ $A=-2h,\ B=-2k,\ h^2+k^2-r^2=C$

ดังนั้น $h=-\frac{A}{2}$ และ $k=-\frac{B}{2}$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$

และจาก $h^2+k^2-r^2=C$

$$-r^2=C-h^2-k^2$$

$$r^2=h^2+k^2-C \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

แทนค่า $h=-\frac{A}{2}$ และ $k=-\frac{B}{2}$ ในสมการ (1)

จะได้ว่า

$$r^2=\left(-\frac{A}{2}\right)^2+\left(-\frac{B}{2}\right)^2-C$$

$$r^2=\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C$$

$$r^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}$$

$$r=\sqrt{\frac{A^2+B^2-4C}{4}}=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$$

รัศมียาว $=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4C}$ เมื่อ $A^2+B^2-4C>0$

การเขียนกราฟของวงกลม

มีหลักการดังนี้

1. เปลี่ยนรูปทั่วไปของสมการวงกลมให้อยู่ในรูปมาตรฐาน โดยใช้ความรู้เรื่องสมการกำลังสองสมบูรณ์เพื่อหาจุดศูนย์กลาง และความยาวของรัศมี

2. เขียนกราฟโดยลงจุดศูนย์กลางและความยาวของรัศมี

ข้อควรจำ ในการแก้ปัญหาวงกลมจำเป็นต้องเข้าใจสาระสำคัญ ซึ่งสรุปดังตาราง 1.1

ตาราง 1.1 สมการ จุดศูนย์กลาง รัศมี ของวงกลมที่อยู่ในรูปมาตรฐานและรูปทั่วไป

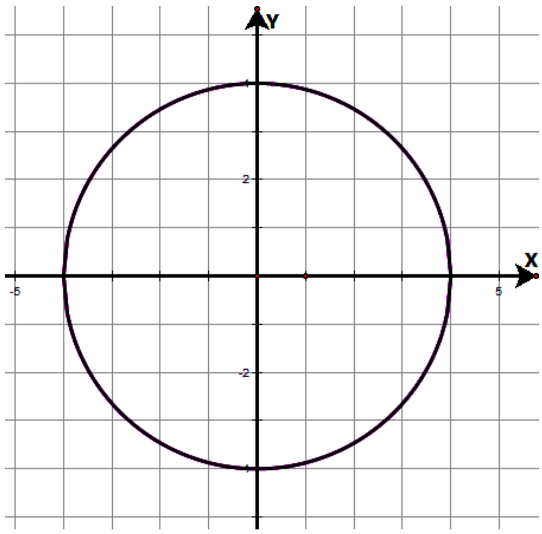
	วงกลมรูปมาตรฐาน	วงกลมทั่วไป
สมการ	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2;\ r>0$	$x^2+y^2+Ax+By+C=0;$ $A^2+B^2-4C>0$
จุดศูนย์กลาง	(h,k)	$\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$
รัศมี	r	$\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4C}$

ตัวอย่าง 1.1 จงหาสมการรูปทั่วไปของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และมีรัศมียาว 4 หน่วย พร้อมทั้งเขียนกราฟ

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ เขียนให้อยู่ในรูปมาตรฐาน ดังนี้

$$x^2+y^2=4^2$$

ดังนั้นรูปทั่วไปของวงกลมนี้ คือ $x^2+y^2-4^2=0$ หรือ $x^2+y^2-16=0$ และเขียนกราฟได้ดังนี้



□

ตัวอย่าง 1.2 จงหาจุดศูนย์กลาง รัศมี และเขียนกราฟของสมการวงกลม

$$x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$$

วิธีทำ วิธีที่ 1 จากสมการ $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ จัดให้อยู่ในรูปสมการกำลังสองสมบูรณ์ ดังนี้

$$x^2 + y^2 - 4y = 5$$

$$x^2 + \left(y^2 - 4y + 2^2\right) = 5 + 2^2$$

$$x^2 + \left(y^2 - 4y + 2^2\right) = 5 + 4$$

$$(x-0)^2 + (y-2)^2 = 9$$

$$(x-0)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่ $(0,2)$ รัศมียาว 3 หน่วย

วิธีที่ 2 จากสมการ $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ เปรียบเทียบกับสมการ

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

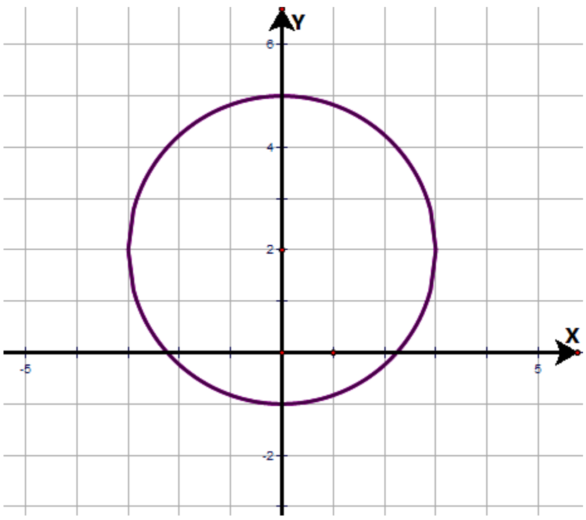
จะได้ว่า $A = 0,\ B = -4,\ C = -5$

ดังนั้น รัศมีของวงกลม คือ $\frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C} = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + (-4)^2 - 4(-5)}$

$= 3$ หน่วย

จุดศูนย์กลางของวงกลม คือ $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = \left(-\frac{0}{2}, -\frac{(-4)}{2}\right) = (0,2)$

และเขียนกราฟได้ดังนี้



□

แบบฝึกหัดที่ 1 เรื่องวงกลม

1. จงหาสมการวงกลมที่มีเงื่อนไขตามที่กำหนดให้ต่อไปนี้
   1.1 มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และมีรัศมียาว 2 หน่วย
   1.2 มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(3,1)$ และมีรัศมียาว 3 หน่วย
   1.3 มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(1,-1)$ และผ่านจุด $(4,2)$
   1.4 มีจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางอยู่ที่ $(-3,3)$ และ $(3,-1)$

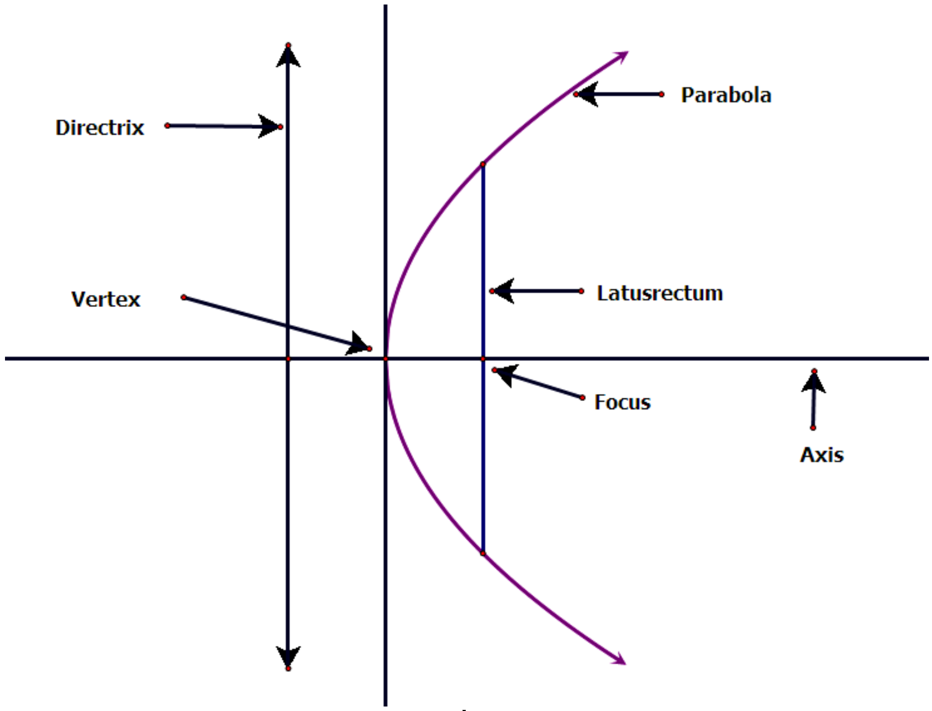
2. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมที่กำหนดสมการให้ดังนี้ พร้อมเขียนกราฟ
   2.1 $x^2 + y^2 - 36 = 0$
   2.2 $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$
   2.3 $x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$
   2.4 $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$
   2.5 $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$

2. พาราโบลา (Parabola)

นิยาม พาราโบลา คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งและอยู่ห่างจากเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากันเสมอ

ส่วนประกอบของพาราโบลา

1. จุดคงที่เรียกว่า จุดโฟกัส (Focus) เขียนแทนด้วย F
2. เส้นตรงคงที่ เรียกว่า เส้นไดเรกตริกซ์
3. เส้นตรงที่ลากผ่านโฟกัสและตั้งฉากกับเส้นไดเรกตริกซ์ เรียกว่า แกนของพาราโบลา
4. จุดที่กราฟตัดกับแกนพาราโบลาเรียกว่า จุดยอด
5. ระยะทางจากจุดยอดไปยังโฟกัส เขียนแทนด้วย c
6. คอร์ดที่ตั้งฉากกับแกนของพาราโบลาและผ่านจุดโฟกัส (AA') เรียกว่า ลาตัสเรกตัม



รูปที่ 2.1

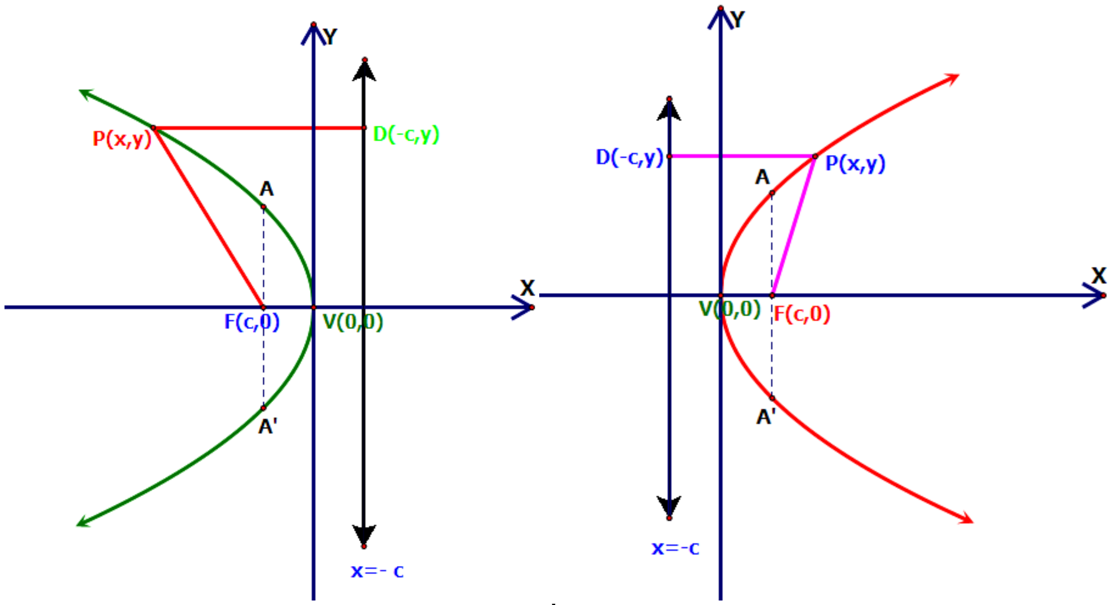
รูปแบบของพาราโบลา

1. จุดยอดของพาราโบลา อยู่ที่ $(0,0)$

1.1 พาราโบลาที่มีแกน x เป็นแกนสมมาตร จะมี 2 ลักษณะ ดังนี้

1.1.1 พาราโบลารูปเปิดด้านขวา หรือตะแคงขวา มีรูปสมการ คือ

$y^2 = 4cx$ โดยที่ $c > 0$ ดังรูปที่ 2.2 (ขวามือ)



รูปที่ 2.2

จากรูปที่ 2.2 สามารถหารูปสมการดังกล่าวได้โดยอาศัยนิยามของพาราโบลา

จะได้ว่า $$\left|\overline{FP}\right| = \left|\overline{PD}\right|$$

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-(-c))^2+(y-y)^2}$$

$$(x-c)^2+(y-0)^2 = (x+c)^2$$

$$(x-c)^2+y^2 = (x+c)^2$$

$$(x-c)^2-(x+c)^2+y^2 = 0$$

$$y^2 = \left(x^2+2xc+c^2\right)-\left(x^2-2xc+c^2\right)$$

$$y^2 = x^2+2cx+c^2-x^2+2cx-c^2$$

$$y^2 = 4cx$$

1.1.2 พาราโบลารูปเปิดด้านซ้าย หรือตะแคงซ้าย มีรูปสมการ คือ

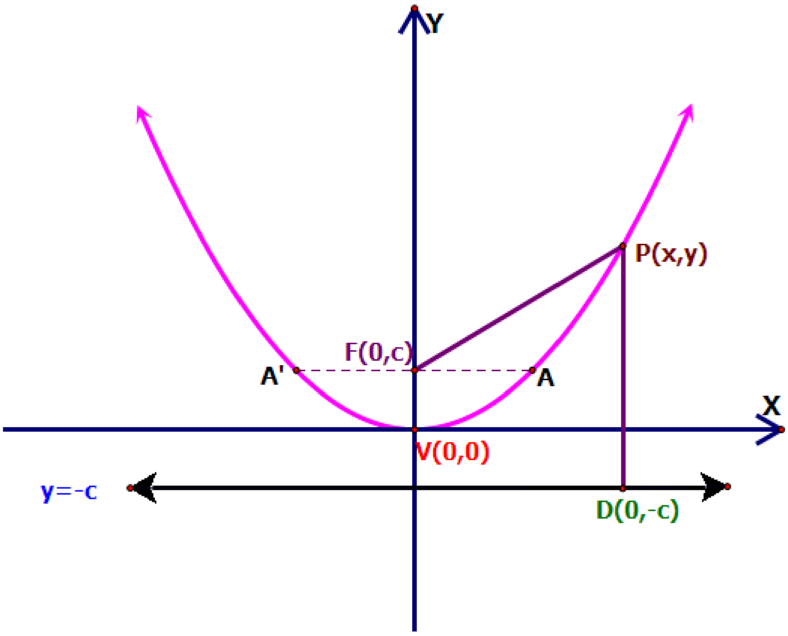
$y^2 = 4cx$ โดยที่ $c < 0$ ดังรูปที่ 2.2 (ซ้ายมือ)

(วิธีการหารูปสมการทำนองเดียวกันกับหัวข้อ 1.1.1)

1.2 พาราโบลาที่แกน y เป็นแกนสมมาตร จะมี 2 ลักษณะ ดังนี้

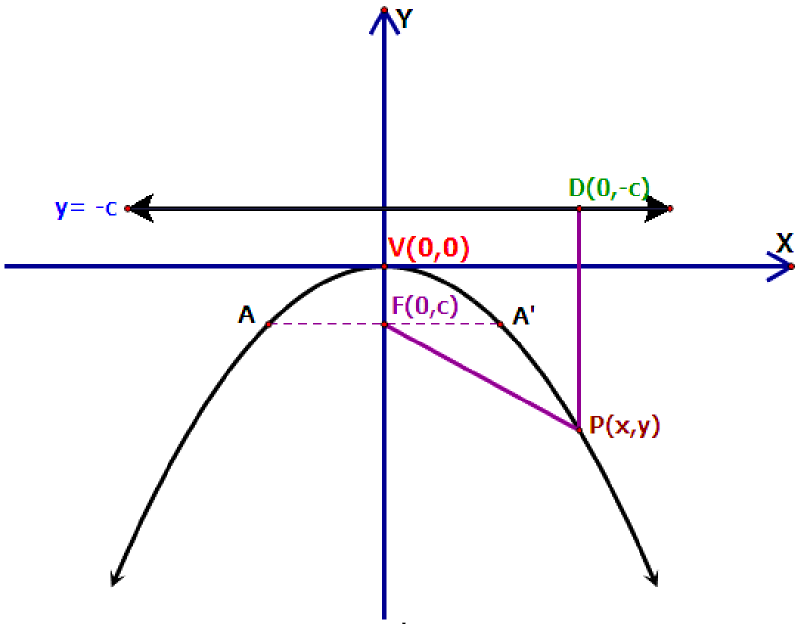
1.2.1 พาราโบลารูปเปิดด้านบน หรือพาราโบลาหงาย มีรูปสมการ คือ

$x^2 = 4cy$ โดยที่ $c > 0$ ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3

1.2.2 พาราโบลารูปเปิดด้านล่าง หรือพาราโบลาคว่ำ มีรูปสมการ คือ $x^2 = 4cy$ โดยที่ $c < 0$ ดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4

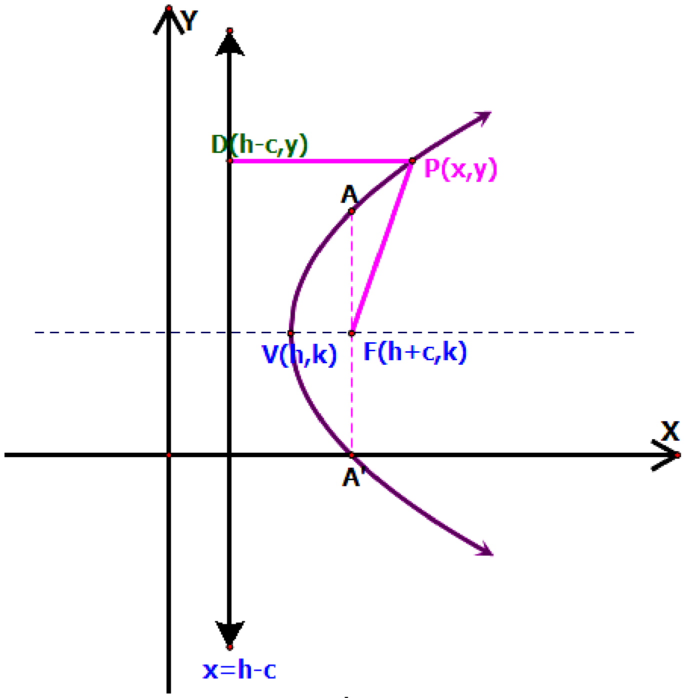
2. จุดยอดของพาราโบลาอยู่ที่ (h,k)

รูปสมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h,k) สามารถหารูปสมการได้เช่นเดียวกับหัวข้อ 1 และแบ่งเป็น 2 รูปแบบ ดังนี้

2.1 พาราโบลาที่มีแกน x เป็นแกนสมมาตร จะมี 2 ลักษณะ ดังนี้

2.1.1 พาราโบลาเปิดด้านขวา หรือพาราโบลาตะแคงขวา มีรูปสมการ คือ

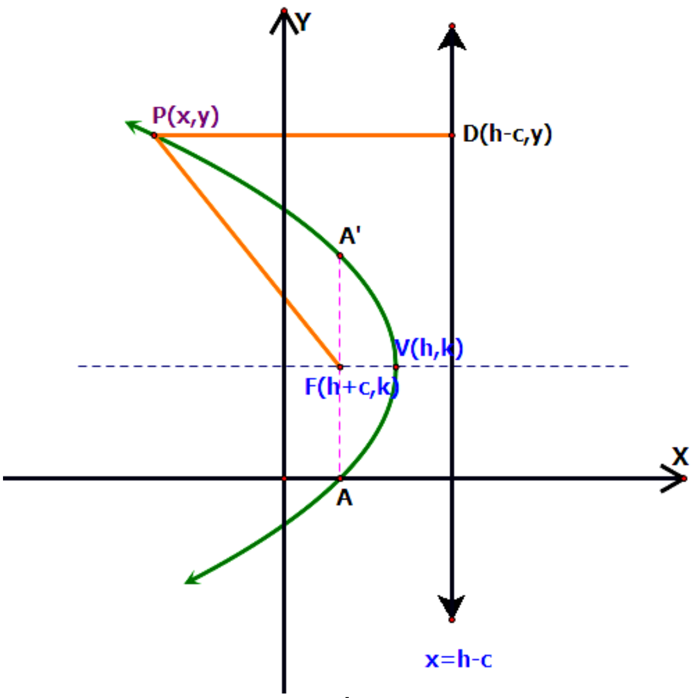
$(y-k)^2 = 4c(x-h)$ โดยที่ $c > 0$ ดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5

2.1.2 พาราโบลาเปิดด้านซ้าย หรือพาราโบลาตะแคงซ้าย มีรูปสมการ คือ

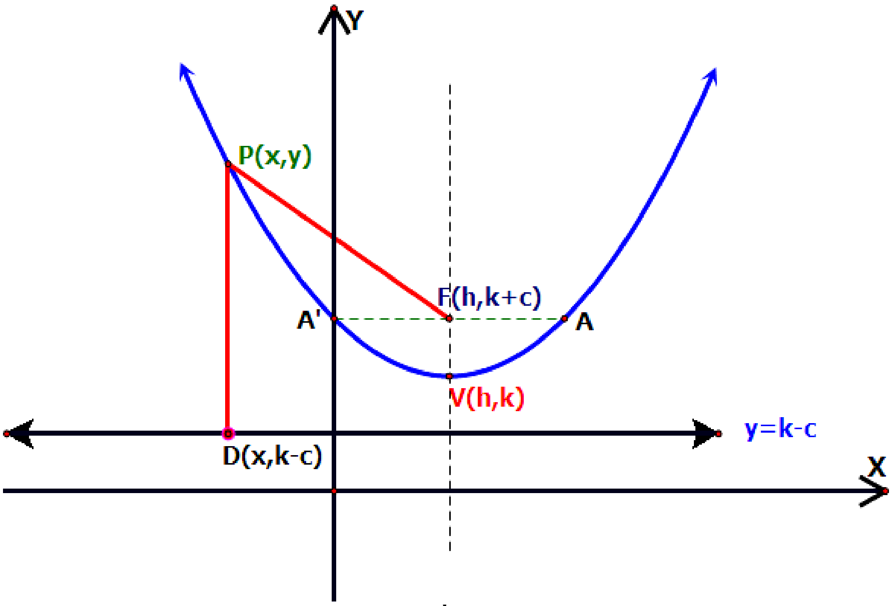
$(y-k)^2 = 4c(x-h)$ โดยที่ $c < 0$ ดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6

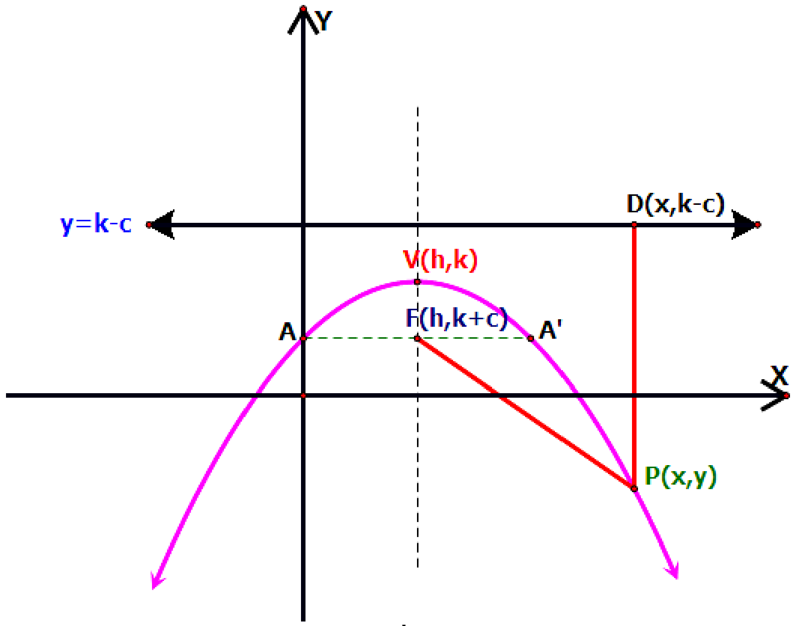
2.2 พาราโบลาที่แกน y เป็นแกนสมมาตร จะมี 2 ลักษณะ ดังนี้

2.2.1 พาราโบลาเปิดด้านบน หรือพาราโบลาหงาย มีรูปสมการ คือ $(x-h)^2 = 4c(y-k)$ โดยที่ $c > 0$ ดังรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7

2.2.2 พาราโบลาเปิดด้านล่าง หรือพาราโบลาคว่ำ มีรูปสมการ คือ $(x-h)^2 = 4c(y-k)$ โดยที่ $c < 0$ ดังรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8

รูปทั่วไปของพาราโบลา

เมื่อ D, E, F เป็นค่าคงตัวใด ๆ รูปทั่วไปของพาราโบลาเป็นดังนี้

1. แกนสมมาตรขนานแกน x (กราฟจะตะแคงขวาหรือซ้าย) จะมีรูปสมการ ดังนี้

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0 \text{ เมื่อ } D \neq 0$$

2. แกนสมมาตรขนานแกน y (กราฟจะหงายหรือคว่ำ) จะมีรูปสมการ ดังนี้

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0 \text{ เมื่อ } E \neq 0$$

การเขียนกราฟของพาราโบลา

มีหลักการดังนี้

1. เปลี่ยนรูปทั่วไปของสมการพาราโบลาให้อยู่ในรูปมาตรฐาน เพื่อหาจุดยอด จุดโฟกัส ความยาวลาตัสเรกตัม และสมการไดเรกตริกซ์

2. เขียนกราฟของพาราโบลาโดยลงจุดยอด จุดโฟกัส ความยาวลาตัสเรกตัม และเขียนเส้นโค้งพาราโบลาผ่านจุดยอดและจุดปลายความยาวลาตัสเรกตัมทั้งสอง และเขียนสมการไดเรกตริกซ์

ข้อควรจำ ในการแก้ปัญหาเรื่องพาราโบลา ควรทำความเข้าใจสาระสำคัญ ซึ่งสรุปดังตารางต่อไปนี้

1. พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0)$

สมการรูปมาตรฐาน	ลักษณะของรูป	จุดโฟกัส	สมการไดเรกตริกซ์	แกนพาราโบลา
$x^2 = 4cy$	เปิดด้านบน	$F(0,c)$	$y = -c$	แกน Y $(x = 0)$
$x^2 = 4cy$	เปิดด้านล่าง	$F(0,c)$	$y = -c$	แกน Y $(x = 0)$
$y^2 = 4cx$	เปิดด้านขวา	$F(c,0)$	$x = -c$	แกน X $(y = 0)$
$y^2 = 4cx$	เปิดด้านซ้าย	$F(c,0)$	$x = -c$	แกน X $(y = 0)$

2. พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h,k)

สมการรูปมาตรฐาน	ลักษณะของรูป	จุดโฟกัส	สมการไดเรกตริกซ์	แกนพาราโบลา
$(x-h)^2 = 4c(y-k)$	เปิดด้านบน	$F(h,k+c)$	$y = k - c$	$x = h$
$(x-h)^2 = 4c(y-k)$	เปิดด้านล่าง	$F(h,k+c)$	$y = k - c$	$x = h$
$(y-k)^2 = 4c(x-h)$	เปิดด้านขวา	$F(h+c,k)$	$x = h - c$	$y = k$
$(y-k)^2 = 4c(x-h)$	เปิดด้านซ้าย	$F(h+c,k)$	$x = h - c$	$y = k$

ตัวอย่าง 2.1 จงหาสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด ผ่านจุด $(4,1)$ และมีแกน Y เป็นแกนพาราโบลา พร้อมเขียนกราฟ

วิธีทำ จากโจทย์ พาราโบลาผ่านจุด $(4,1)$ มีจุดยอดอยู่ที่ $(0,0)$ และมีแกน Y เป็นแกนพาราโบลา

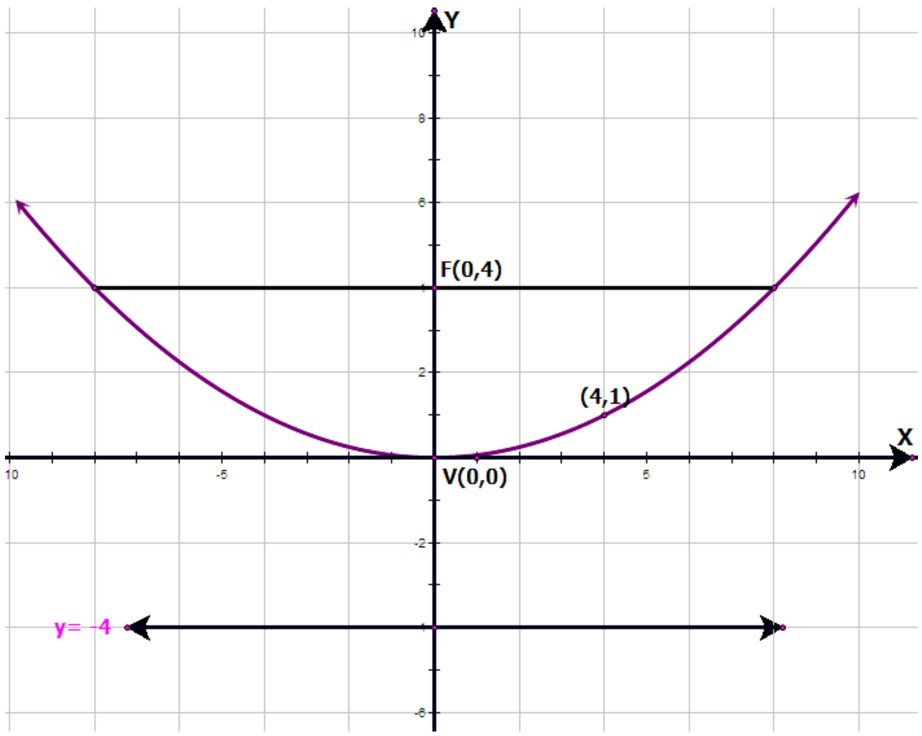
ดังนั้น เป็นพาราโบลาหงาย จะหาค่า c ได้โดยแทนค่า $x = 4, y = 1$ ในสมการรูปมาตรฐาน ดังนี้

$$x^2 = 4cy$$
$$(4)^2 = 4c(1)$$
$$16 = 4c$$
$$c = 4$$

ดังนั้น สมการพาราโบลา คือ $x^2 = 4(4)y$

$$x^2 = 16y \quad \text{หรือ} \quad x^2 - 16y = 0$$

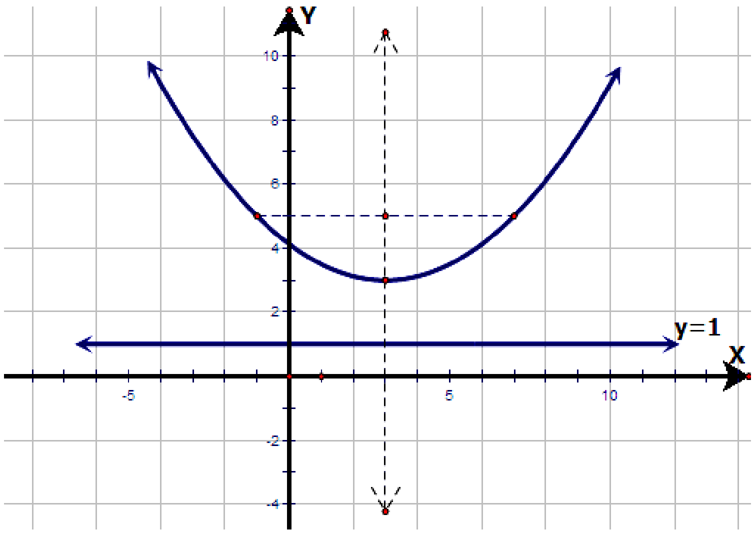
และเขียนกราฟได้ดังนี้



□

ตัวอย่าง 2.2 จงหาสมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(3,3)$ และมีสมการไดเรกตริกซ์ คือ $y = 1$ พร้อมเขียนกราฟ

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ เขียนกราฟเพื่อสร้างความสัมพันธ์ได้ดังนี้



จากรูป จะได้ ค่า $c = 3 - 1 = 2$ หน่วย ดังนั้นเขียนให้อยู่ในรูปมาตรฐาน ได้ดังนี้

$$(x-3)^2 = 4(2)(y-3)$$

$$x^2 - 6x + 9 = 8(y-3)$$

$$x^2 - 6x + 9 = 8y - 24$$

$$x^2 - 6x - 8y + 33 = 0$$

ดังนั้นสมการพาราโบลานี้ คือ $x^2 - 6x - 8y + 33 = 0$ □

ตัวอย่าง 2.3 จงหาสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(0,0)$ มีจุดปลายของลาตัสเรกตัมอยู่ที่ $(-4,-2)$ และ $(4,-2)$ พร้อมเขียนกราฟ

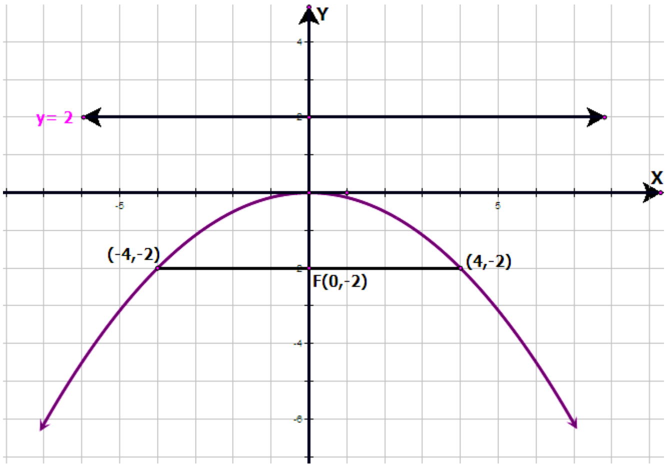
วิธีทำ เนื่องจากจุดปลายของลาตัสเรกตัมอยู่ในคอร์ดรันที่ 3 และ 4 ดังนั้นพาราโบลามีลักษณะเป็นพาราโบลาคว่ำ และมีจุดโฟกัสอยู่ที่ $\left(\frac{-4+4}{2}, \frac{(-2)+(-2)}{2}\right) = (0,-2)$ ทำให้ได้ว่า $c = -2$

นั่นคือ สมการพาราโบลา คือ $x^2 = 4cy$

$$x^2 = 4(-2)y$$

$x^2 = -8y$ หรือ $x^2 + 8y = 0$

เขียนกราฟได้ดังนี้



ตัวอย่าง 2.4 จงหาจุดยอด จุดโฟกัส สมการไดเรกตริกซ์ แกนพาราโบลา และความยาวของลาตัสเรกตัม ของสมการพาราโบลา $x^2 - 8x + 4y + 4 = 0$ พร้อมเขียนกราฟ

วิธีทำ จากสมการ $x^2 - 8x + 4y + 4 = 0$ เขียนให้อยู่ในรูปมาตรฐาน ดังนี้

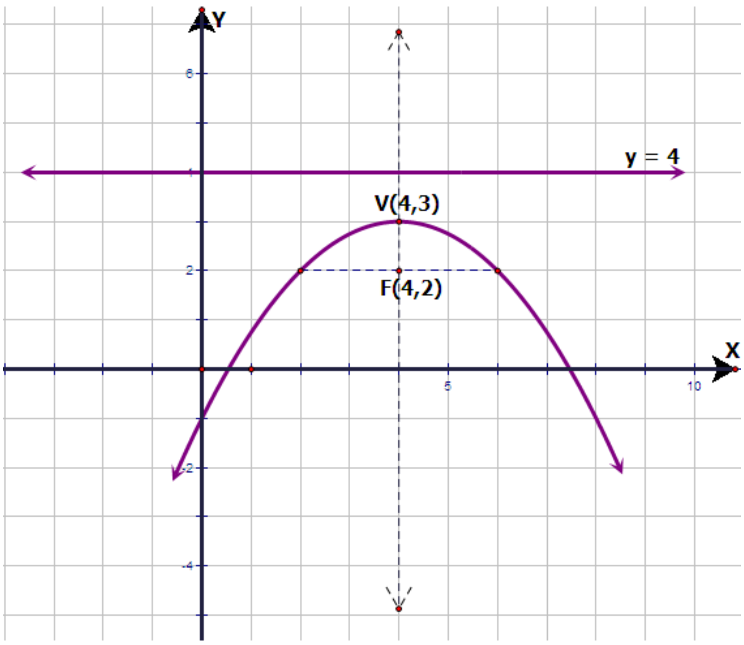
$$x^2 - 8x + 16 = -4y - 4 + 16$$

$$(x-4)^2 = -4y + 12$$

$$(x-4)^2 = -4(y-3)$$

$$(x-4)^2 = 4(-1)(y-3)$$

ดังนั้น ค่า $c = -1$ และได้ว่า จุดยอดอยู่ที่ $V(h,k) = (4,3)$ จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(h,k+c) = (4,2)$ สมการไดเรกตริกซ์ คือ $y = 4$ แกนพาราโบลา คือ เส้นตรง $x = 4$ ความลาตัสเรกตัม เท่ากับ 4 หน่วย และเขียนกราฟได้ดังนี้



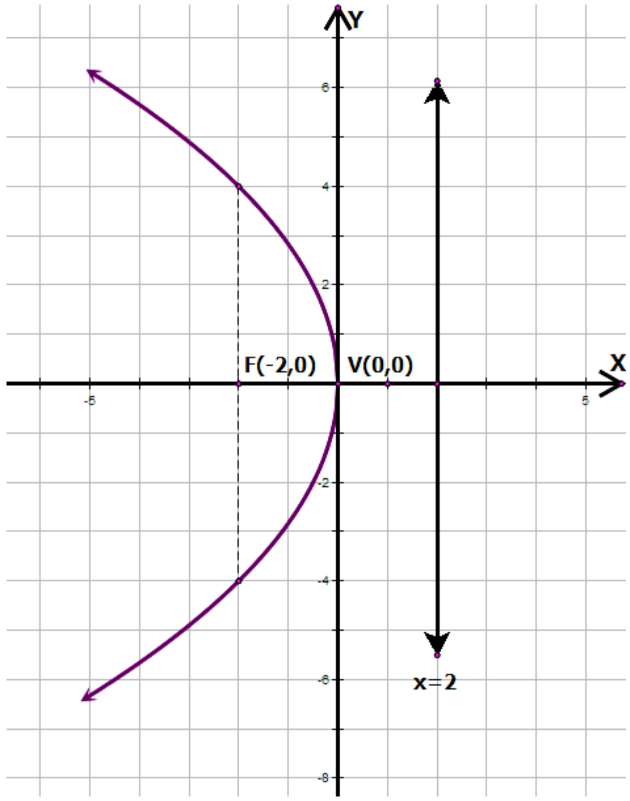
ตัวอย่าง 2.5 จงหาสมการพาราโบลา ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด มีสมการไดเรกตริกซ์ $x = 2$ และมีแกน X เป็นแกนพาราโบลา

วิธีทำ กำหนดให้สมการไดเรกตริกซ์ $x = 2$ มีแกน X เป็นแกนพาราโบลา และมีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0)$ ดังนั้น พาราโบลามีลักษณะตะแคงซ้าย จะได้ว่า $c = -2$

ดังนั้น สมการพาราโบลา คือ $y^2 = 4(-2)x$

$$y^2 = -8x$$

และเขียนกราฟ ดังนี้



□

ตัวอย่าง 2.6 จงหาจุดยอด จุดโฟกัส สมการไดเรกตริกซ์ แกนพาราโบลา และความยาวของลาตัสเรกตัม ของสมการพาราโบลา $y^2 - 2y + 12x - 35 = 0$ พร้อมเขียนกราฟ

วิธีทำ จากสมการ $y^2 - 2y + 12x - 35 = 0$ จัดรูปสมการใหม่ จะได้ว่า

$$(y^2 - 2y) = -12x + 35$$

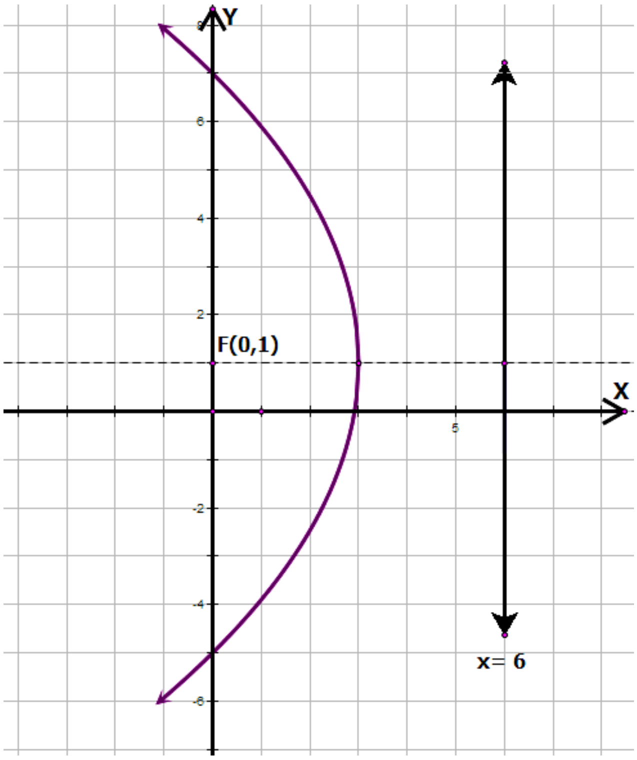
$$(y^2 - 2y + 1^2) = -12x + 35 + 1^2$$

$$(y - 1)^2 = -12x + 36$$

$$(y - 1)^2 = -12(x - 3)$$

$$(y - 1)^2 = 4(-3)(x - 3)$$

ดังนั้น จะได้ว่า พาราโบลามีจุดยอดอยู่ที่ $(3,1)$ จุดโฟกัสอยู่ที่ $(0,1)$ สมการไดเรกตริกซ์ คือ $x = 6$ แกนพาราโบลา คือ $y = 1$ และความยาวลาตัสเรกตัม เท่ากับ 12 หน่วย และเขียนกราฟได้ ดังนี้



□

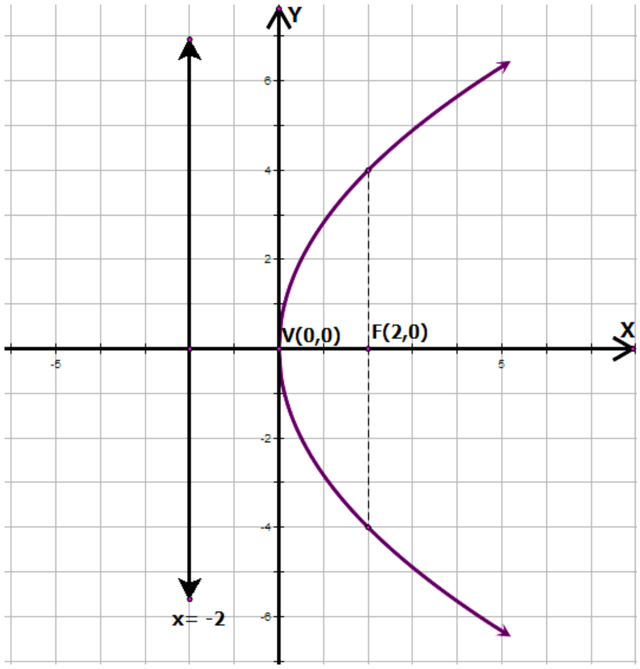
ตัวอย่าง 2.7 จงหาสมการพาราโบลา ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(2,0)$

วิธีทำ จากที่กำหนดให้พาราโบลามีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(2,0)$ แสดงว่า พาราโบลา มีลักษณะตะแคงขวาหรือเปิดด้านขวา ดังนั้น จะได้ว่า $c = 2$ และได้ว่า

$$y^2 = 4(2)x$$

$y^2 = 8x$ หรือ $y^2 - 8x = 0$ เป็นสมการของพาราโบลา และ

สามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



□

ตัวอย่าง 2.8 จงหาจุดยอด จุดโฟกัส สมการไดเรกตริกซ์ แกนพาราโบลา และความยาวของลาตัสเรกตัม ของสมการพาราโบลา $y^2 + 2y - 4x + 5 = 0$ พร้อมเขียนกราฟ

วิธีทำ จากสมการ $y^2 + 2y - 4x + 5 = 0$ จัดรูปสมการใหม่ จะได้ว่า

$$\left(y^2 + 2y\right) = 4x - 5$$

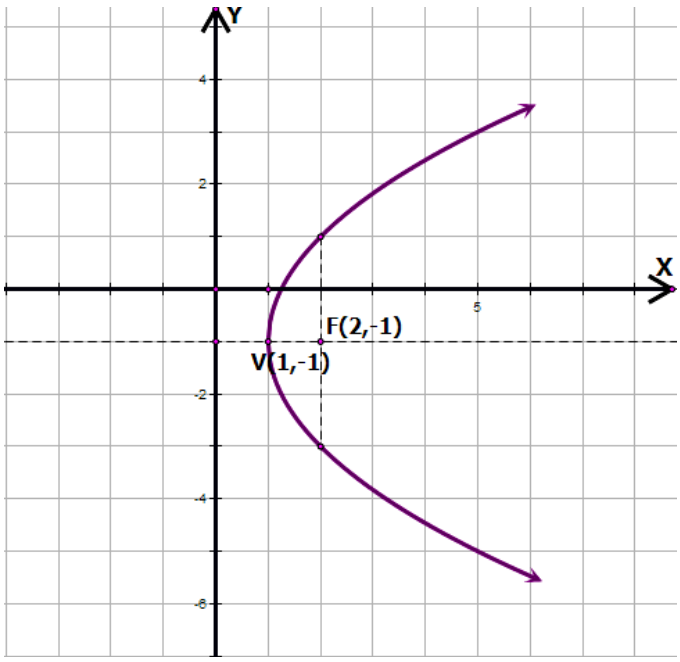
$$\left(y^2 + 2y + 1^2\right) = 4x - 5 + 1^2$$

$$(y+1)^2 = 4x - 4$$

$$(y+1)^2 = 4(x-1)$$

$$(y+1)^2 = 4(1)(x-1)$$

ดังนั้น พาราโบลามีจุดยอดอยู่ที่ $(1,-1)$ จุดโฟกัสอยู่ที่ $(2,-1)$ สมการไดเรกตริกซ์ คือ $x = 0$ แกนพาราโบลา คือ $y = -1$ และความยาวลาตัสเรกตัม เท่ากับ 4 หน่วย สามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



□

แบบฝึกหัดที่ 2 เรื่องพาราโบลา

1. จงหาสมการพาราโบลา ตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1.1 มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด มีสมการไดเรกตริกซ์ $x = 5$

1.2 มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด ผ่านจุด $(3,5)$ และมีแกน X เป็นแกนพาราโบลา

1.3 จุดยอดอยู่ที่ $(2,-1)$ มีสมการไดเรกตริกซ์ $y = 1$

1.4 จุดปลายของลาตัสเรกตัม $(-3,3)$ และ $(-3,-1)$ เป็นพาราโบลารูปเปิดด้านซ้าย

2. จงหาจุดยอด จุดโฟกัส สมการไดเรกตริกซ์ แกนพาราโบลา ของสมการพาราโบลาต่อไปนี้ พร้อมเขียนกราฟ

2.1 $y^2 = 12x$

2.2 $x^2 + 10y = 0$

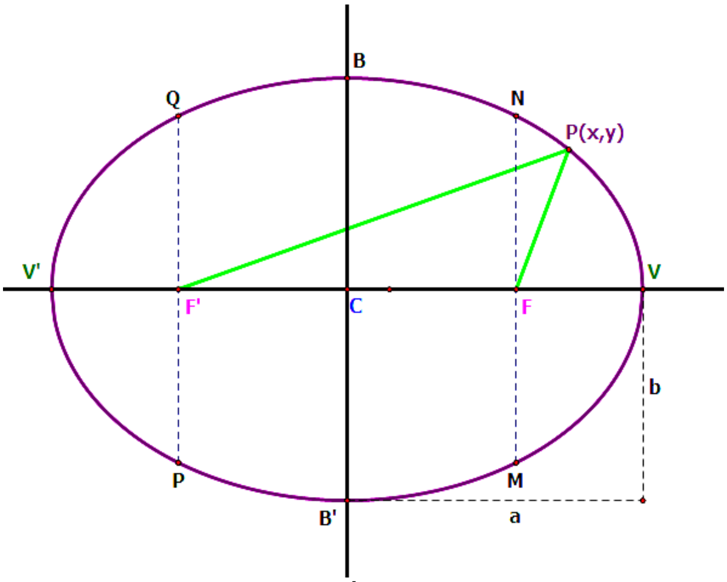
2.3 $x^2 - 6x - 8y + 17 = 0$

2.4 $y^2 + 26x - 8y - 8 = 0$

3. วงรี (Ellipse)

นิยาม วงรี คือ เซตของจุดบนระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดมีค่าคงตัวเสมอ โดยค่าคงตัวมีค่ามากกว่าระยะระหว่างจุดคงที่ทั้งสอง

ส่วนประกอบของวงรี



รูปที่ 13

1. เรียกจุด C ว่าจุดศูนย์กลาง
2. เรียก V และ V' ว่าจุดยอด
3. เรียก F และ F' ว่าจุดโฟกัส (Focus)
4. เรียก $V'V$ ว่าแกนเอก
5. เรียก $B'B$ ว่าแกนโท
6. เรียก PQ และ MN ว่าลาตัสเรกตัม มีความยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$

รูปแบบของวงรี

รูปแบบของวงรีมี 2 รูปแบบ แต่ละรูปแบบมี 2 ลักษณะและแต่ละลักษณะจะมีรูปสมการที่แตกต่างกัน และรูปสมการได้มาจากนิยามของวงรี จากรูปที่ 13 จะได้ว่า

$CV = CV' = a$ หน่วย

$CB = CB' = b$ หน่วย

$CF = CF' = c$ หน่วย

ดังนั้น ความยาวของแกนเอก $V'V = 2a$ หน่วย

ความยาวของแกนโท $B'B = 2b$ หน่วย

จากนิยาม $PF + PF' =$ ค่าคงตัวค่าหนึ่งเสมอ ไม่ว่าจุด P จะเลื่อนไปที่ใดบนวงรี จากรูปที่ 13 สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้าเลื่อนจุด P ไปทับจุด V จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
PF + PF' &= VF + VF' \\
&= VF + \left(VF + FF'\right) \\
&= V'F' + \left(VF + FF'\right); VF = V'F' \\
&= V'F' + VF + FF' \\
&= VF + FF' + V'F'
\end{aligned}$$

$$= VV'$$

ดังนั้น $PF + PF' = 2a; VV' = 2a$

กรณีที่ 2 ถ้าเลื่อนจุด P ไปทับจุด B จะได้ว่า

$$PF + PF' = 2a$$

$$BF + BF' = 2a$$

$$BF + BF = 2a; BF = BF'$$

$$2BF = 2a$$

$$BF = a$$

จากสามเหลี่ยมมุมฉาก BCF จะได้ว่า

$$(BF)^2 = (BC)^2 + (CF)^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

จะได้ความสัมพันธ์ของระยะทาง a, b และ c โดยที่ $a > 0, b > 0$ และ $c > 0$ ดังนี้

$$a^2 = b^2 + c^2$$

จากความสัมพันธ์ จะได้ว่า $PF + PF' = 2a$ ดังนั้น จะได้ว่า

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{[x-(-c)]^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการ จะได้ว่า

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$-2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2cx$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$ ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$a^2\left[(x+c)^2 + y^2\right] = \left(a^2 + cx\right)^2$$

$$a^2\left[x^2 + 2xc + c^2 + y^2\right] = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$$

นำ $a^2\left(a^2-c^2\right)$ หารทั้งสองข้างของสมการ จะได้

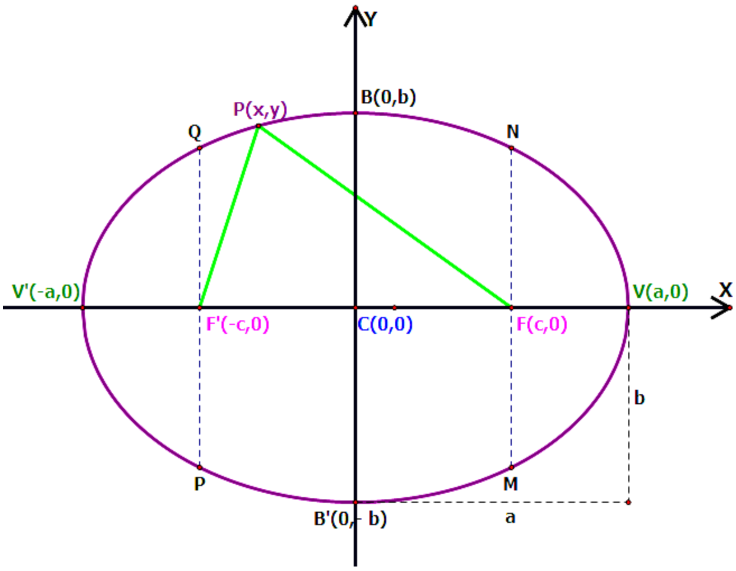
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{เมื่อ} \quad b^2=a^2-c^2$$

เป็นสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลา ซึ่งแต่ละรูปแบบก็จะมีรูปสมการที่แตกต่างกัน ดังต่อไปนี้

1. วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$

1.1 วงรีที่มีแกนเอกอยู่บนแกน x จะมีรูปสมการ ดังนี้

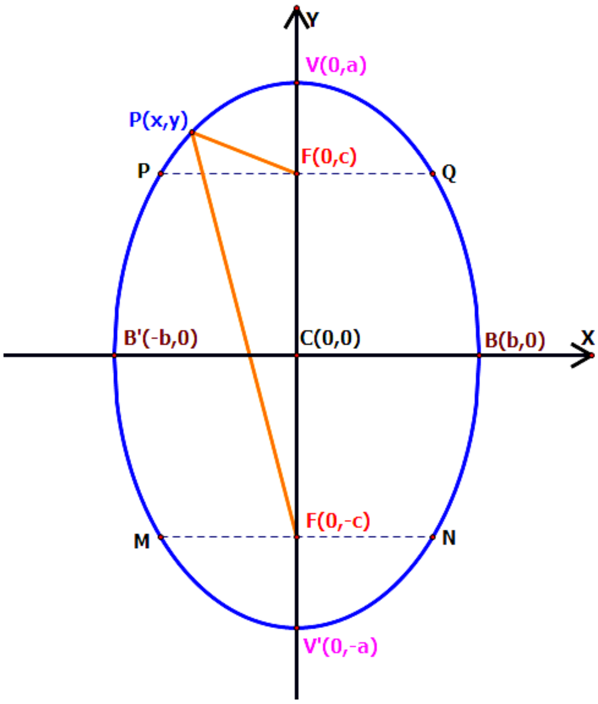
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{เมื่อ} \quad b=\sqrt{a^2-c^2} \text{ โดยที่ } a>b>0 \text{ ดังรูปที่ } 14$$



รูปที่ 14

1.2 วงรีที่มีแกนเอกอยู่บนแกน y จะมีรูปสมการ ดังนี้

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \text{ เมื่อ } b=\sqrt{a^2-c^2} \text{ โดยที่ } a>b>0 \text{ ดังรูปที่ } 15$$

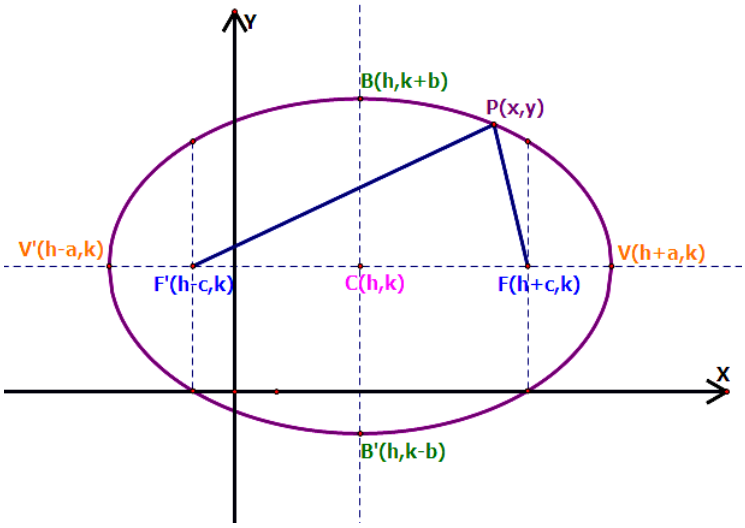


รูปที่ 15

2. วงรีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k)

2.1 วงรีที่มีแกนเอกขนานอยู่บนแกน x จะมีรูปสมการ ดังนี้

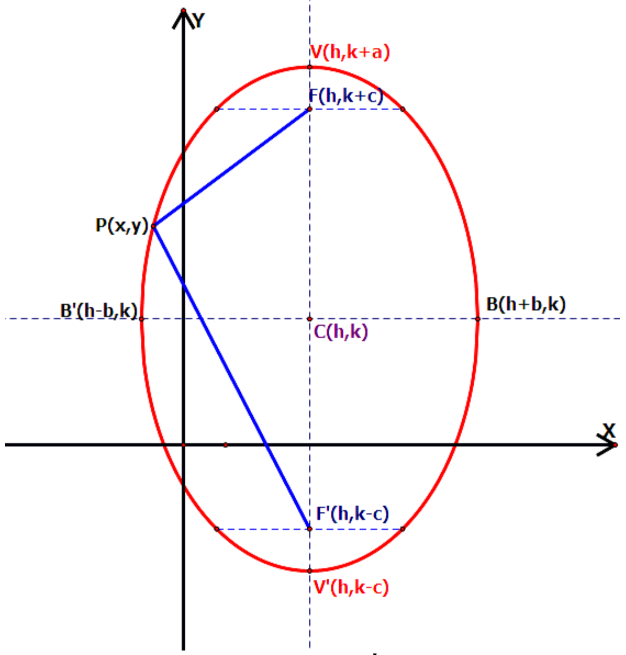
$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ เมื่อ $b=\sqrt{a^2-c^2}$ โดยที่ $a>b>0$ ดังรูปที่ 16



รูปที่ 16

2.2 วงรีที่มีแกนเอกขนานอยู่บนแกน y จะมีรูปสมการ ดังนี้

$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ เมื่อ $b=\sqrt{a^2-c^2}$ โดยที่ $a>b>0$ ดังรูปที่ 17



รูปที่ 17

รูปทั่วไปของสมการวงรี

$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ เมื่อ $A\neq B\neq 0$ และ A กับ B มีเครื่องหมายเหมือนกัน

การเขียนกราฟของวงรี

มีหลักการดังนี้

1. เปลี่ยนรูปทั่วไปของสมการวงรีให้อยู่ในรูปมาตรฐาน เพื่อหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท และความยาวลาตัสเรกตัม

2. เขียนกราฟของวงรีโดยลงจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวลาตัสเรกตัม เขียนเส้นโค้งวงรีผ่านจุดยอด จุดปลายความยาวลาตัสเรกตัมและจุดปลายความยาวแกนโท ตามลำดับ

ข้อควรจำ ในการแก้ปัญหาวงรี ควรเข้าใจสาระสำคัญซึ่งสรุปดังตารางข้างล่างต่อไปนี้

1. วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$

สมการรูปมาตรฐาน	แกนเอก	แกนโท	จุดยอด	จุดโฟกัส
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	ทับแกน X	ทับแกน Y	$(\pm a,0)$	$(\pm c,0)$
$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	ทับแกน Y	ทับแกน X	$(0,\pm a)$	$(0,\pm c)$

สมการ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	**สมการ** $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$
1. จุดศูนย์กลาง $C(0,0)$	1. จุดศูนย์กลาง $C(0,0)$
2. จุดยอด $V_1(a,0),\ V_2(-a,0)$	2. จุดยอด $V_1(0,a),\ V_2(0,-a)$
3. จุดโฟกัส $F_1(c,0),\ F_2(-c,0)$	3. จุดโฟกัส $F_1(0,c),\ F_2(0,-c)$
4. แกนเอกยาว 2a และทับแกน X	4. แกนเอกยาว 2a และทับแกน Y
5. แกนโทยาว 2b และทับแกน Y	5. แกนโทยาว 2b และทับแกน X
6. ลาตัสเรกตัมยาว $\dfrac{2b^2}{a}$	6. ลาตัสเรกตัมยาว $\dfrac{2b^2}{a}$

2. วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k)

สมการรูปมาตรฐาน	แกนเอก	แกนโท	จุดยอด	จุดโฟกัส
$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$	ขนาน แกน X	ขนาน แกน Y	$(h\pm a,k)$	$(h\pm c,k)$
$\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$	ขนาน แกน Y	ขนาน แกน X	$(h,k\pm a)$	$(h,k\pm c)$

สมการ $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$	**สมการ** $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$
1. จุดศูนย์กลาง $C(h,k)$	1. จุดศูนย์กลาง $C(h,k)$
2. จุดยอด $V_1(h+a,k),\ V_2(h-a,k)$	2. จุดยอด $V_1(h,k+a),\ V_2(h,k-a)$
3. จุดโฟกัส $F_1(h+c,k),\ F_2(h-c,k)$	3. จุดโฟกัส $F_1(h,k+c),\ F_2(h,k-c)$
4. แกนเอกยาว 2a และขนานทับแกน X	4. แกนเอกยาว 2a และขนานแกน Y
5. แกนโทยาว 2b และขนานแกน Y	5. แกนโทยาว 2b และขนานแกน X
6. ลาตัสเรกตัมยาว $\dfrac{2b^2}{a}$	6. ลาตัสเรกตัมยาว $\dfrac{2b^2}{a}$

โดยที่ $a>0,\ b>0,\ c>0,\ a>b,\ a>c$ และ $a^2=c^2+b^2$

ตัวอย่าง 3.1 จงหาสมการวงรีที่มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(0,6)$ และ $(0,-6)$ ครึ่งแกนโทยาว 3 หน่วย พร้อมเขียนกราฟ

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ $b=3$, $F_1=(0,6)$ และ $F_2=(0,-6)$ ทำให้ได้ว่า $c=6$

หาค่า a จาก $a^2=b^2+c^2$ จะได้ว่า $a=\sqrt{b^2+c^2}$

$$a=\sqrt{3^2+6^2}$$

$$a = \sqrt{45}$$

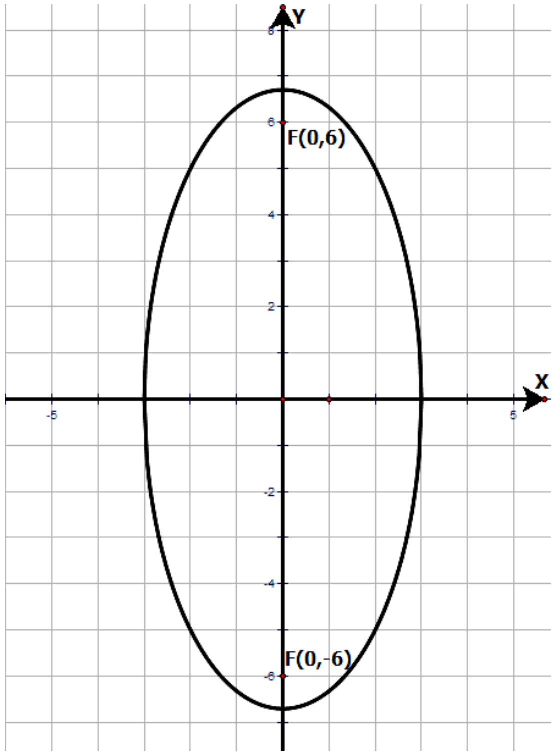
ดังนั้น เขียนให้อยู่ในรูปมาตรฐาน จะได้ว่า $\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{\sqrt{45}^2} = 1$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{45} = 1$$

$$45x^2 + 9y^2 = 405$$

$$45x^2 + 9y^2 - 405 = 0 \text{ หรือ } 5x^2 + y^2 - 45 = 0$$

และสามารถเขียนกราฟของสมการวงรีได้ดังนี้



□

ตัวอย่าง 3.2 จงหาสมการวงรี ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$ จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(4,0)$ ความยาวลาตัสเรกตัม 2 หน่วย พร้อมเขียนกราฟ

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$ จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(4,0)$

จะได้ว่า $a = 4$ และเนื่องจากความยาวลาตัสเรกตัม เท่ากับ $\dfrac{2b^2}{a}$

ดังนั้น $$2 = \frac{2b^2}{4}$$

$$b^2 = \frac{2(4)}{2}$$

$$b^2 = 4 \quad , \quad b = 2$$

ดังนั้น สมการวงรี คือ $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

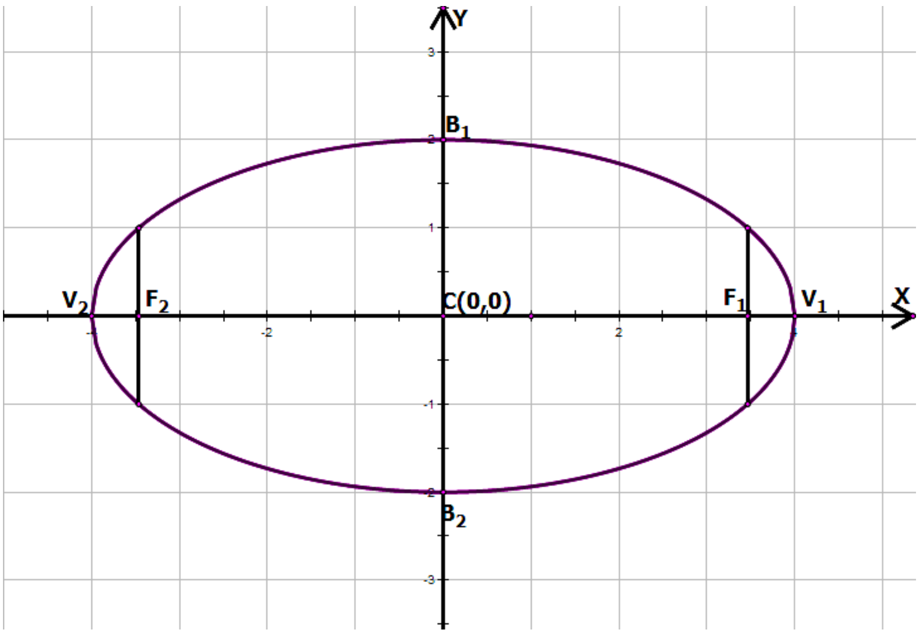
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

คูณด้วย 64 ทั้งสองข้างของสมการ จะได้ $4x^2 + 16y^2 = 64$

$4x^2 + 16y^2 - 64 = 0$ หรือ

$x^2 + 4y^2 - 16 = 0$

และเขียนกราฟได้ดังนี้



□

ตัวอย่าง 3.3 จงหาจุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส และจุดยอดของสมการวงรี

$9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y - 11 = 0$ พร้อมเขียนกราฟ

วิธีทำ จากสมการวงรี $9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y - 11 = 0$ เขียนให้อยู่ในรูปมาตรฐาน ดังนี้

$$(9x^2 - 18x) + (4y^2 - 16y) = 11$$

$$9(x^2 - 2x) + 4(y^2 - 4y) = 11$$

$$9(x^2 - 2x + 1^2) + 4(y^2 - 4y + 2^2) = 11 + 9(1^2) + 4(2^2)$$

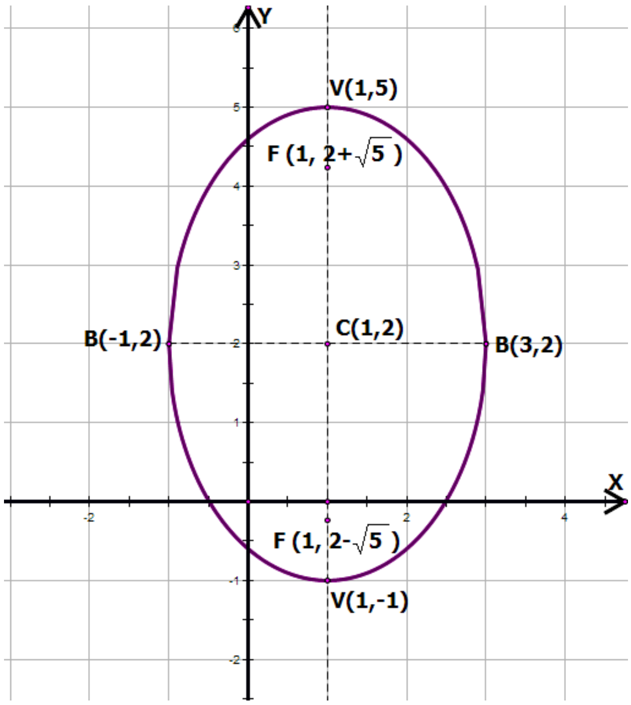
$$9(x^2 - 2x + 1^2) + 4(y^2 - 4y + 2^2) = 36$$

$$9(x-1)^2 + 4(y-2)^2 = 36$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

จากสมการรูปมาตรฐานของวงรี จะได้ว่า $a=3, b=2$ ดังนั้น $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$ ดังนั้นวงรีมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(1,2)$ จุดโฟกัสอยู่ที่ $(1,2+\sqrt{5})$ และ $(1,2-\sqrt{5})$ จุดยอดของวงรีอยู่ที่ $(1,5)$ และ $(1,-1)$ สามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



□

ตัวอย่าง 3.4 จงหาจุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส และจุดยอดของสมการวงรี $4x^2+9y^2-8x+18y-23=0$ พร้อมเขียนกราฟ

วิธีทำ จากสมการวงรี $4x^2+9y^2-8x+18y-23=0$ เขียนให้อยู่ในรูปมาตรฐาน ดังนี้

$$4(x^2-2x)+9(y^2+2y)=23$$

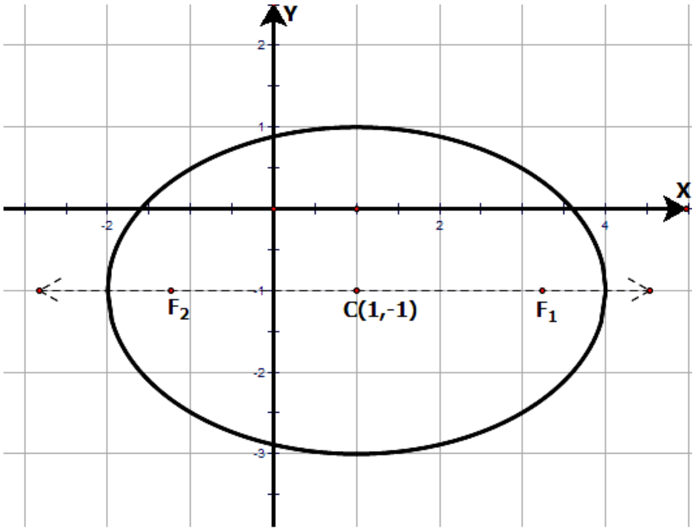
$$4(x^2-2x+1)+9(y^2+2y+1)=23+4+9$$

$$4(x-1)^2+9(y+1)^2=36$$

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$$

จากสมการรูปมาตรฐาน $a=3, b=2$ ดังนั้น $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

นั่นคือ วงรีมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(1,-1)$ จุดโฟกัสอยู่ที่ $(1+\sqrt{5},-1),(1-\sqrt{5},-1)$ และจุดยอดอยู่ที่ $(-2,-1),(4,-1)$ สามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



□

แบบฝึกหัดที่ 3 เรื่องวงรี (Ellipse)

1. จงหาสมการวงรี เมื่อกำหนดเงื่อนไขให้ดังนี้

1.1 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$ จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(3,0)$ ความยาวลาตัสเรกตัม 4 หน่วย

1.2 จุดยอดอยู่ที่ $(0,3)$ และ $(0,-3)$ จุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(0,2)$

1.3 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(3,-1)$ จุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $\left(3,-1+\sqrt{3}\right)$ จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(3,1)$

1.4 จุดโฟกัสอยู่ที่ $(-2,6)$ และ $(-2,0)$ ความยาวแกนเอก 10 หน่วย

2. จงหาจุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส จุดยอด ความยาวแกนเอกและความยาวแกนโท ของสมการต่อไปนี้ พร้อมเขียนกราฟ

2.1 $4x^2 + 25y^2 = 100$

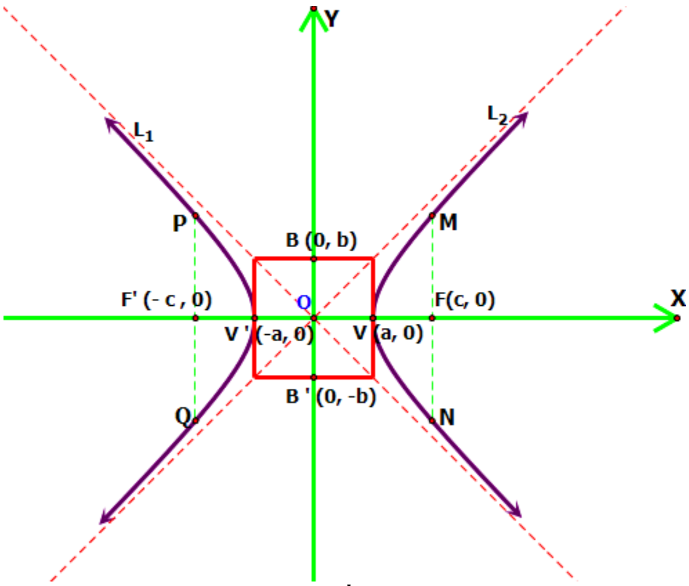
2.2 $16x^2 + y^2 - 16 = 0$

2.3 $x^2 + 9y^2 - 2x - 36y + 28 = 0$

2.4 $49x^2 + 4y^2 - 2x + 2y - 143 = 0$

4. ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)

นิยาม ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของจุดบนระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดบนระนาบจะมีค่าคงตัวเสมอ โดยค่าคงตัวนี้มีค่าน้อยกว่าระยะทางจากจุดคงที่ทั้งสอง



รูปที่ 18

ส่วนประกอบต่าง ๆ ของไฮเพอร์โบลา

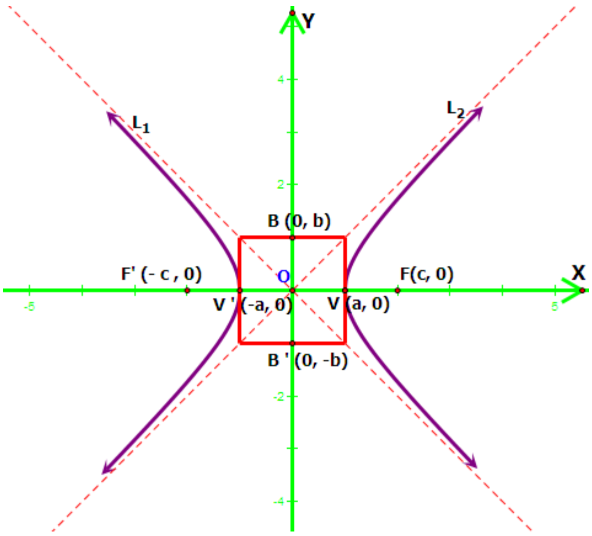
1. เรียกจุด O ว่าจุดศูนย์กลาง
2. เรียกจุด $V'(-a,0)$ และ $V(a,0)$ ว่าจุดยอด
3. เรียกจุด $F_1(-c,0)$ และ $F_2(c,0)$ ว่าจุดโฟกัส (Focus)
4. เรียก VV' ว่า แกนตามขวาง
5. เรียก BB' ว่าแกนสังยุค
6. เรียก L_1 และ L_2 ว่าเส้นกำกับ
7. เรียก PQ และ MN ว่าลาตัสเรกตัม มีความยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$

รูปแบบของไฮเพอร์โบลา

1. ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$

1.1 ไฮเพอร์โบลาที่มีแกน x เป็นแกนสมมาตรมีสมการ ดังนี้

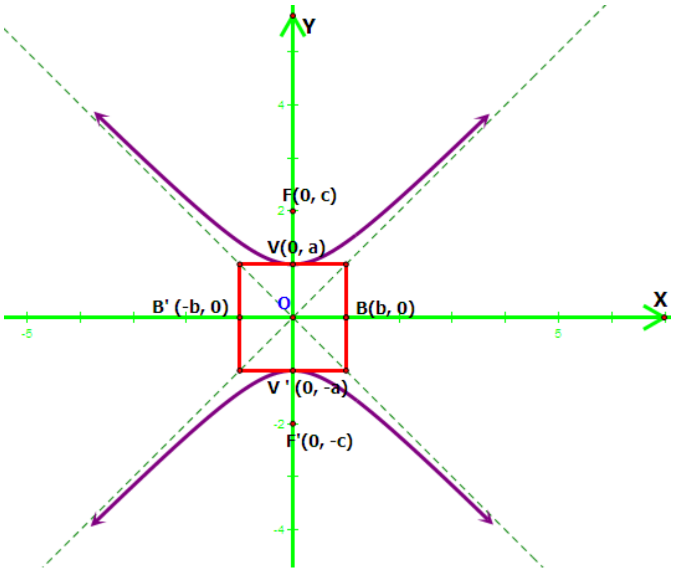
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ เมื่อ } b=\sqrt{c^2-a^2} \text{ ดังรูปที่ 19}$$



รูปที่ 19

1.2 ไฮเพอร์โบลาที่มีแกน y เป็นแกนสมมาตรมีสมการ ดังนี้

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ ดังรูปที่ 20

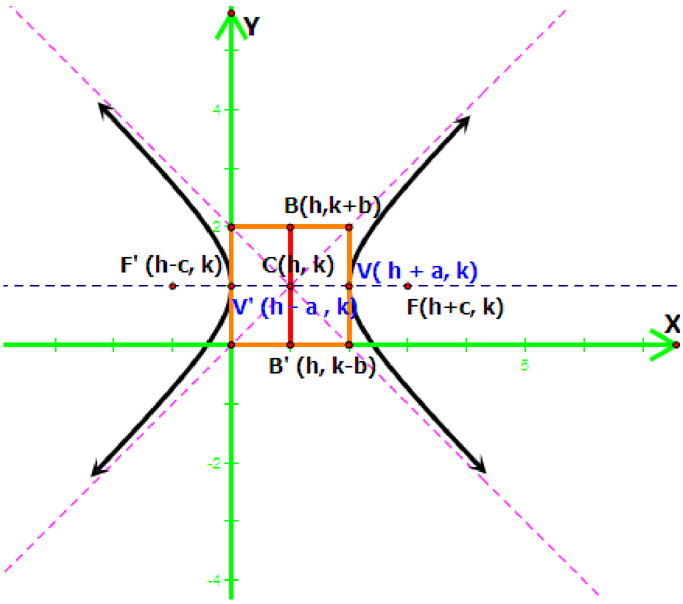


รูปที่ 20

2. ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดกศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

2.1 ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนสมมาตรขนานแกน x จะมีรูปสมการ ดังนี้

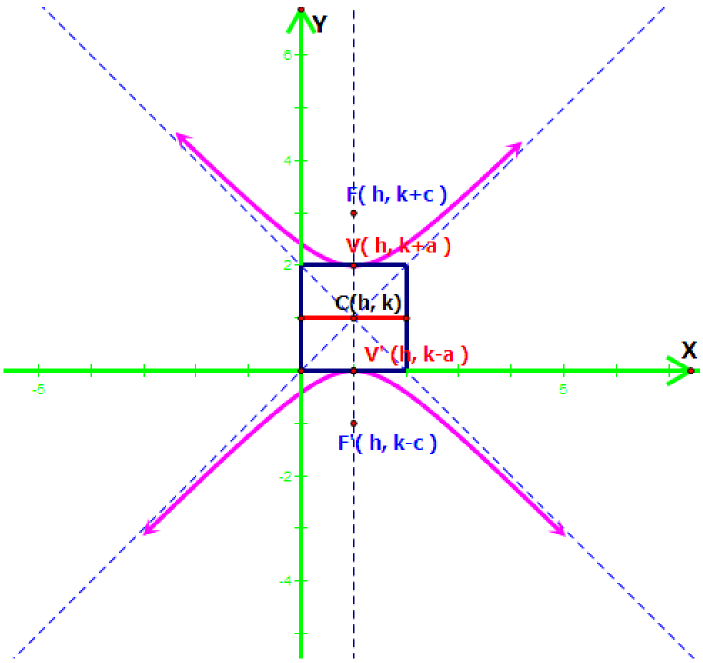
$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ ดังรูปที่ 21



รูปที่ 21

2.2 ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนสมมาตรขนานแกน y จะมีรูปสมการ ดังนี้

$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ ดังรูปที่ 22



รูปที่ 22

รูปทั่วไปของสมการไฮเพอร์โบลา

เมื่อ A, B, C เป็นค่าคงตัวใด ๆ รูปทั่วไปของสมการ ไฮเพอร์โบลา เป็นดังนี้

1. แกนสมมาตรขนานแกน x จะมีรูปสมการ ดังนี้ $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ เมื่อ $A > 0, B < 0$

2. แกนสมมาตรขนานแกน y จะมีรูปสมการ ดังนี้ $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ เมื่อ $A < 0, B > 0$

การเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา

มีหลักการดังนี้

1. เปลี่ยนสมการรูปทั่วไปให้อยู่ในรูปมาตรฐาน เพื่อหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวลาตัสเรกตัม ความยาวแกนตามขวาง ความยาวแกนสังยุค สมการเส้นกำกับ

2. เขียนกราฟของไฮเพอร์โบลาโดยลงจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวลาตัสเรกตัม ความยาวแกนตามขวาง ความยาวแกนสังยุค และเส้นกำกับตามลำดับ แล้วลากเส้นโค้งไฮเพอร์โบลาผ่านจุดยอด จุดปลายเส้นความยาวลาตัสเรกตัมแนบกับเส้นกำกับ

ข้อควรจำ ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับไฮเพอร์โบลา เราจะต้องทำความเข้าใจและนึกถึงสาระสำคัญเกี่ยวกับไฮเพอร์โบลา ซึ่งสรุปในตารางต่อไปนี้ให้ได้เสมอ คือ

สมการ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	สมการ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
1. จุดศูนย์กลาง $C(0,0)$	1. จุดศูนย์กลาง $C(0,0)$
2. จุดยอด $V_1(a,0), V_2(-a,0)$	2. จุดยอด $V_1(0,a), V_2(0,-a)$
3. จุดโฟกัส $F_1(c,0), F_2(-c,0)$	3. จุดโฟกัส $F_1(0,c), F_2(0,-c)$
4. แกนตามขวางยาว 2a และทับแกน X	4. แกนตามขวางยาว 2a และทับแกน Y
5. แกนสังยุคยาว 2b และทับแกน Y	5. แกนสังยุคยาว 2b และทับแกน X
6. ลาตัสเรกตัมยาว $\frac{2b^2}{a}$	6. ลาตัสเรกตัมยาว $\frac{2b^2}{a}$
7. เส้นกำกับ $y = \pm\frac{b}{a}x$	7. เส้นกำกับ $y = \pm\frac{a}{b}x$

สมการ $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	สมการ $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$
1. จุดศูนย์กลาง $C(h,k)$	1. จุดศูนย์กลาง $C(h,k)$
2. จุดยอด $V_1(h+a,k),V_2(h-a,k)$	2. จุดยอด $V_1(h,k+a),V_2(h,k-a)$
3. จุดโฟกัส $F_1(h+c,k),F_2(h-c,k)$	3. จุดโฟกัส $F_1(h,k+c),F_2(h,k-c)$
4. แกนตามขวางยาว 2a และขนานแกน X	4. แกนตามขวางยาว 2a และขนานแกน Y
5. แกนสังยุคยาว 2b และขนานแกน Y	5. แกนสังยุคยาว 2b และขนานแกน X
6. ลาตัสเรกตัมยาว $\frac{2b^2}{a}$	6. ลาตัสเรกตัมยาว $\frac{2b^2}{a}$
7. เส้นกำกับ $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$	7. เส้นกำกับ $y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$

โดยที่ $c>a>0,\ c>b$ และ $c^2=a^2+b^2$

ตัวอย่าง 4.1 จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(-3,0)$ และ $(3,0)$ มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(-5,0)$ และ $(5,0)$ พร้อมเขียนกราฟ

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้จุดยอดของไฮเพอร์โบลาอยู่ที่ $(-3,0)$ และ $(3,0)$ ทำให้ได้ค่า $a=3$ และกำหนดจุดโฟกัสอยู่ที่ $(-5,0)$ และ $(5,0)$ ทำให้ได้ค่า $c=5$

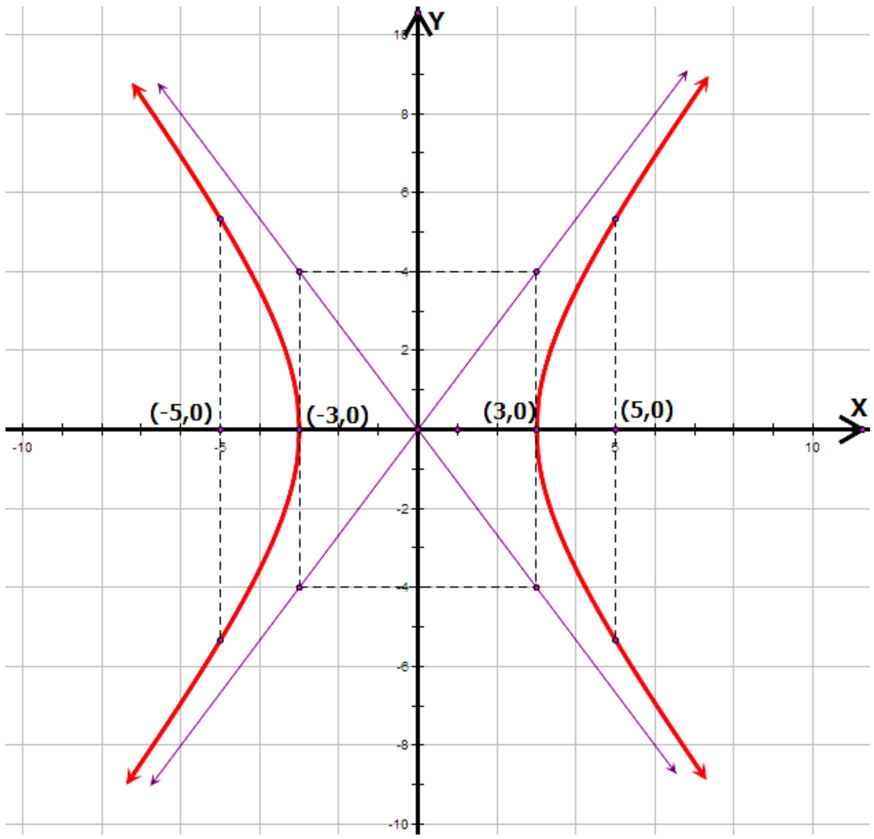
ดังนั้น หาค่า b ได้จากสมการ $b^2=c^2-a^2$

$$b^2=5^2-3^2$$
$$b^2=25-9$$
$$b^2=16$$
$$b^2=4$$

เนื่องจาก จุดยอดและจุดโฟกัสอยู่บนแกน X ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางอยู่บนแกน X และมีสมการดังนี้

$$\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$$
$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$
$$9x^2-16y^2=144$$

$9x^2-16y^2-144=0$ และมีสมการเส้นกำกับ คือ $y=\pm\frac{4}{3}x$ เขียนกราฟได้ดังนี้



□

ตัวอย่าง 4.2 จงหาสมการและเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(0,-3)$ และ $(0,3)$ มีความชัน เท่ากับ $\frac{1}{2}$

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดจุดโฟกัสอยู่ที่ $(0,-\sqrt{5})$ และ $(0,\sqrt{5})$ แสดงว่าไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางอยู่บนแกน Y ความชันของแกนสังยุค เท่ากับ $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ จะได้ค่า $a=1$ และ $b=2$

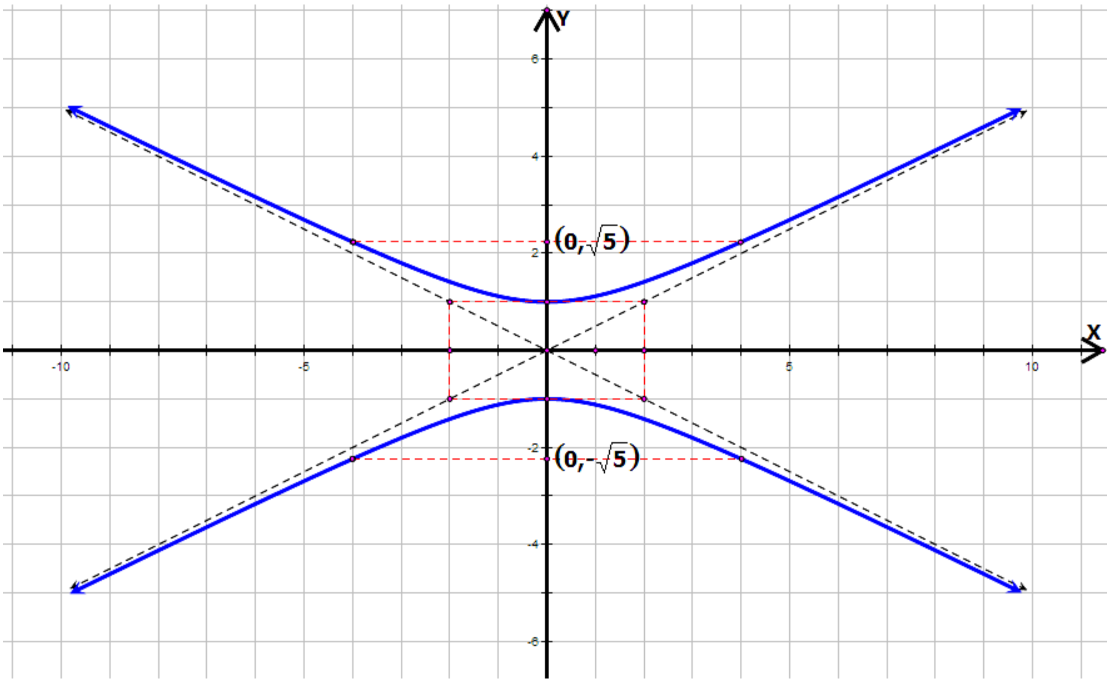
ดังนั้น สมการเส้นกำกับ คือ $y=\pm\frac{1}{2}x$ และสมการของไฮเพอร์โบลา คือ

$$\frac{y^2}{1^2}-\frac{x^2}{2^2}=1$$

$$\frac{y^2}{1}-\frac{x^2}{4}=1$$

$$4y^2-x^2=4$$

$4y^2-x^2-4=0$ และสามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



ตัวอย่าง 4.3 จงหาสมการและเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-1,-1)$ แกนตามขวางขนานแกน X ยาว 8 หน่วย และแกนสังยุค ยาว 6 หน่วย

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ แกนตามขวางขนานแกน X ยาว 8 หน่วย จะได้ค่า $a = 4$ และแกนสังยุค ยาว 6 หน่วย จะได้ค่า $b = 3$ และได้ค่า $c = \sqrt{16+9} = 5$

ดังนั้น สมการของไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{(x+1)^2}{4^2} - \frac{(y+1)^2}{3^2} = 1$

$$\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

$$9(x+1)^2 - 16(y+1)^2 = 144$$

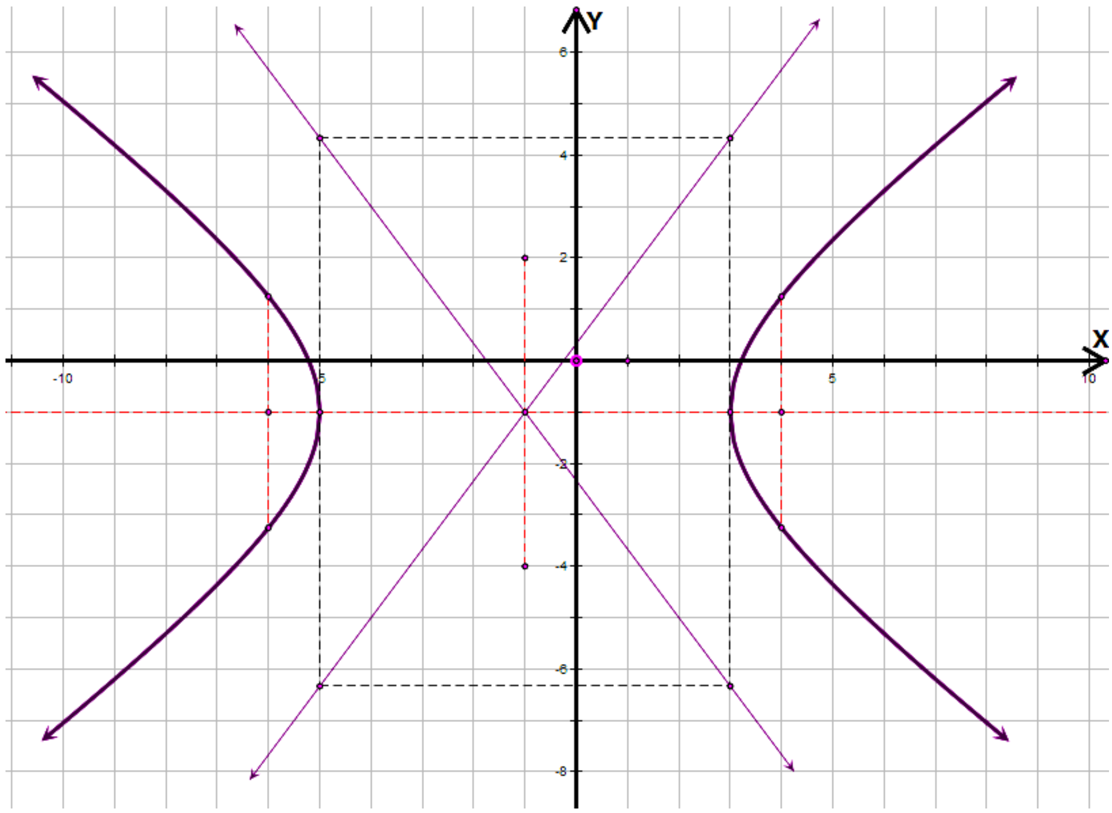
$$9(x^2+2x+1) - 16(y^2+2y+1) = 144$$

$$9x^2+18x+9-16y^2-32y-16 = 144$$

$$9x^2+18x-16y^2-32y+9-16-144 = 0$$

$$9x^2+18x-16y^2-32y-151 = 0$$

เขียนกราฟได้ดังนี้



ตัวอย่าง 4.4 จงหาจุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส จุดยอด และสมการเส้นกำกับ ของสมการไฮเพอร์โบลา $y^2 - 4x^2 + 20y - 8x + 92 = 0$ พร้อมเขียนกราฟ

วิธีทำ จากสมการ $y^2 - 4x^2 + 20y - 8x + 92 = 0$ จัดให้อยู่ในรูปมาตรฐาน ดังนี้

$$(y^2 + 20y) - (4x^2 + 8x) = -92$$

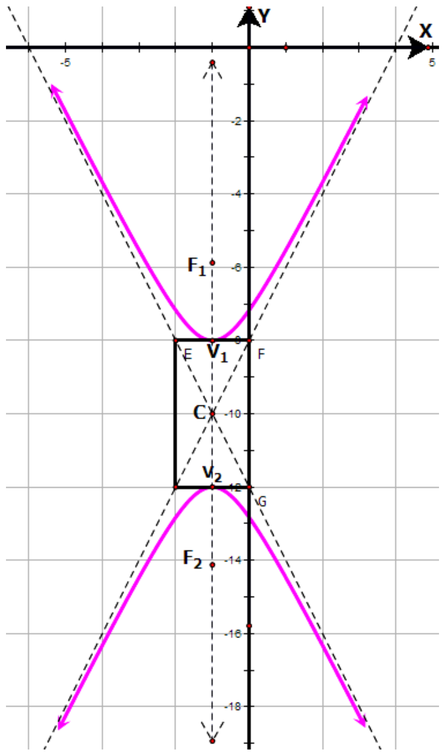
$$(y^2 + 20y + 100) - 4(x^2 + 2x + 1) = -92 + 100 - 4$$

$$(y+10)^2 - 4(x+1)^2 = 4$$

$$\frac{(y+10)^2}{4} - \frac{(x+1)^2}{1} = 1$$

จากสมการรูปมาตรฐาน หาค่า c จะได้ว่า $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

นั่นคือ ไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(h,k) = (-1,-10)$ จุดยอดอยู่ที่ $V(h,k \pm a) = (-1,-8),(-1,-12)$ จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(h,k \pm c) = \left(-1,-10-\sqrt{5}\right)$, $\left(-1,-10+\sqrt{5}\right)$ และจากสมการเส้นกำกับ คือ $y - k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$ เท่ากับ $y + 10 = \pm\frac{2}{1}(x+1)$ ดังนั้นสมการเส้นกำกับ คือ $y = 2x - 8$ และ $y = -2x - 12$ สามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



□

แบบฝึกหัดที่ 4 เรื่องไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)

1. จงหาสมการไฮเพอร์โบลา เมื่อกำหนดเงื่อนไขให้ดังนี้

1.1 จุดยอดอยู่ที่ $(-2,0)$ และ $(2,0)$ จุดโฟกัสอยู่ที่ $(-5,0)$ และ $(5,0)$

1.2 จุดโฟกัสอยู่ที่ $(1,3)$ และ $(-2,3)$ มีความชันเส้นกำกับ เท่ากับ $\frac{3}{2}$

1.3 จุดโฟกัสอยู่ที่ $(0,-6)$ และ $(0,6)$ จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่ $(-2,0)$ และ $(2,0)$

1.4 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(4,5)$ แกนตามขวางยาว 8 หน่วย และขนานกับแกน X แกนสังยุคยาว 4 หน่วย

2. จงหาจุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส จุดยอด สมการเส้นกำกับ ความยาวลาตัสเรกตัม ความยาวแกนตามขวาง ของสมการไฮเพอร์โบลาที่กำหนดให้ดังนี้ พร้อมเขียนกราฟ

2.1 $16y^2 - 25x^2 = 460$

2.2 $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 41 = 0$

2.3 $y^2 - 4x^2 - 8y + 8x + 16 = 0$