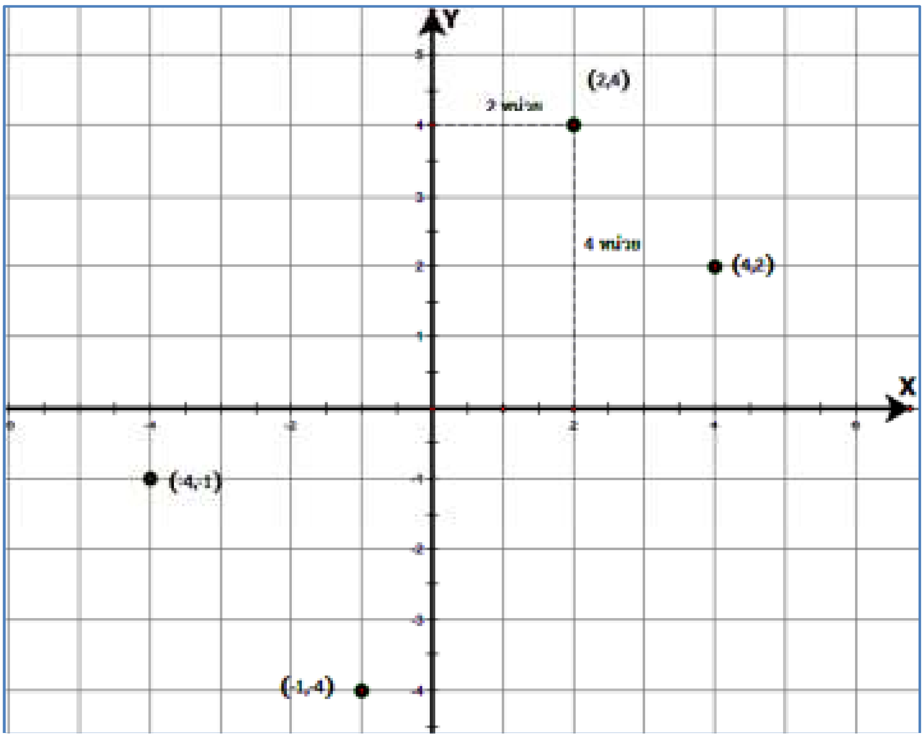
บทที่ 1
ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับฟังก์ชัน

ก่อนที่จะศึกษาเนื้อหาที่ละเอียดทางด้านคณิตศาสตร์สิ่งสำคัญคือการทำความเข้าใจเรื่องฟังก์ชัน ซึ่งในบทนี้จะแนะนำความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับฟังก์ชันซึ่งผู้สนใจสามารถศึกษาได้ด้วยตนเองก่อนศึกษาเนื้อหาในบทต่อไป หรือหากเข้าใจดีแล้วก็สามารถข้ามไปศึกษาบทถัดไปได้โดยไม่ต้องศึกษาบทนี้ก่อน เนื้อหาในบทนี้แนะนำให้ผู้สนใจทราบความเป็นมาของฟังก์ชันและมีฟังก์ชันอะไรบ้างที่ควรรู้จัก เพื่อนำไปใช้ในเนื้อหาต่อไปได้โดยง่าย

1.1 คู่อันดับ (Ordered Pair)

ถ้าเราเริ่มด้วยเส้นตรงซึ่งตั้งฉากกันคู่หนึ่ง เรียกเส้นตรงในแนวนอนว่าแกน X เรียกเส้นตรงในแนวตั้งว่าแกน Y และเรียกจุดตัดของเส้นตรงทั้งสองเส้นนี้ว่าจุดเริ่มต้น (origin) กำหนดหน่วยความยาวให้ทางขวาของแกน Y เป็นบวก ทางซ้ายของแกน Y เป็นลบ และเหนือแกน X เป็นบวก ใต้แกน X เป็นลบ เขียนแทนจุดในระนาบด้วยจำนวนจริงคู่หนึ่ง จำนวนจริงตัวหน้าเป็นระยะจากแกน Y จำนวนจริงตัวหลังเป็นระยะจาก
แกน X



จำนวนจริงคู่นี้เป็นคู่อันดับ (ordered pair) เช่น (2, 4) แตกต่างจาก (4, 2) และ (-4, -1) แตกต่างจาก (-1, -4) ในกรณีทั่วไป คู่อันดับ (a, b) เรียก a ว่าเป็นสมาชิกตัวหน้าหรือสมาชิกตัวที่หนึ่ง เรียก b ว่าสมาชิกตัวหลังหรือสมาชิกตัวที่สอง และ (a, b) จะเท่ากับ (c, d) ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

บทนิยาม 1.1 คู่อันดับ (Order pared) หมายถึง การนำสมาชิกของสองกลุ่มใดๆ มาเข้าคู่สัญลักษณ์ (a,b) อ่านว่า คู่อันดับเอบี โดยที่ a เป็นสมาชิกตัวหน้าหรือตัวที่ 1 และ b เป็นสมาชิกตัวหลังหรือตัวที่ 2

1.2 ผลคูณคาร์ทิเซียน (Cartesian products)

กำหนดให้ $A=\{a,b\}$ และ $B=\{1,2,3\}$ เราสามารถหาคู่อันดับได้ โดยให้สมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับเป็นสมาชิกของเซต *A* และสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับเป็นสมาชิกของเซต *B* เรียกเซตของคู่อันดับที่สร้างขึ้นทั้งหมดว่า ผลคูณคาร์ทิเซียน (cartesian products) ของเซต *A* และเซต *B* และเขียนแทนด้วย $A\times B$ จะได้ว่า

$$A\times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

บทนิยาม 1.2 ผลคูณคาร์ทิเซียนของเซต *A* และ *B* คือเซตของคู่อันดับ (*x*, *y*) ทุกตัว โดยที่ *x* เป็นสมาชิกของเซต *A* และ *y* เป็นสมาชิกของเซต *B*

ตัวอย่าง 1.2.1 กำหนดให้ $A=\{1,2\}$ และ $B=\{a,b,c\}$ จะได้ว่า

$$A\times B=\{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$$

$$B\times A=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$$

$$A\times A=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

$$B\times B=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$$

$\square$

<u>ข้อสังเกต</u> จะเห็นว่า $A\times B\neq B\times A$

1.3 ความสัมพันธ์ (Relations)

ในชีวิตประจำวันเรามีประสบการณ์เกี่ยวกับความสัมพันธ์ (relation) อยู่ตลอดเวลา เช่น ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่เมื่อเราขว้างซึ่งขึ้นอยู่กับเวลา จำนวนผลิตผลของผ้าที่ทอซึ่งขึ้นอยู่กับจำนวนคนงาน เป็นต้น ความสัมพันธ์ที่เกี่ยวกับจำนวน เช่น จำนวนหนึ่งเป็นห้าเท่าของอีกจำนวนหนึ่ง จำนวนหนึ่งมากกว่าอีกจำนวนหนึ่งอยู่สอง เป็นต้น

เพื่อความสะดวก กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ $U=\{0,2,4,6\}$ และพิจารณาความสัมพันธ์ “น้อยกว่า” สำหรับแต่ละคู่อันดับ (x,y) ความสัมพันธ์ $x<y$ จะเป็นจริงหรือเท็จเพียงอย่างเดียวเท่านั้น ลำดับสำคัญเพราะ (0, 6) อยู่ในความสัมพันธ์นี้อยู่แต่ (6, 0) ไม่อยู่ สำหรับสมาชิก *x* และ *y* ของเอกภพสัมพัทธ์ $U=\{0,2,4,6\}$ แบ่งคู่อันดับออกเป็นสองประเภท ประเภทแรกอยู่ในความสัมพันธ์ $x<y$ ประเภทที่สองไม่อยู่

ดังนั้น เมื่อกำหนดเอกภาพสัมพัทธ์ $U=\{0,2,4,6\}$ สามารถให้เซตของคู่อันดับ $\{(0,2),(0,4),(0,6),(2,4),(2,6),(4,6)\}$ แทนความสัมพันธ์ “มากกว่า” เราจึงเกิดความคิดว่า เซตของคู่อันดับเป็นความสัมพันธ์

บทนิยาม 1.3.1 ความสัมพันธ์ คือ เซตของคู่อันดับ

บทนิยาม 1.3.2 r เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไปยัง B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$ และเรียกความสัมพันธ์จากเซต A ไปยัง B

ตัวอย่าง 1.3.1 กำหนดให้ $A=\{2,3,4\}$ และ $B=\{2,3,4,5,6,7,8\}$ ให้ r_1 แทนความสัมพันธ์ “มากกว่า” จากเซต A ไปยัง B จะได้

$$r_1=\{(3,2),(4,2),(4,3)\}$$

หรือ
$$r_1=\{(x,y)\in A\times B \mid x>y\}$$

□

ตัวอย่าง 1.3.2 สำหรับจำนวนจริง x ทุกตัว ให้นิยามค่าสัมบูรณ์ของ x ซึ่งเขียนแทนด้วย $|x|$ ดังนี้

$$|x|=\begin{cases} x & ; \quad x>0 \\ 0 & ; \quad x=0 \\ -x & ; \quad x<0 \end{cases}$$

ให้ $A=\{-1,0,1\}$ ความสัมพันธ์ “มีค่าสัมบูรณ์เท่ากัน” ในเซต A คือ

$$\{(0,0),(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}$$

□

กำหนดให้ $r=\{(a,1),(a,2),(b,3)\}$ เรียก $\{a,b\}$ ว่าโดเมน (domain) ของ r และเขียนแทนด้วย D_r เรียก $\{1,2,3\}$ ว่าเรนจ์ (range) ของ r และเขียนแทนด้วย R_r

บทนิยาม 1.3.3 โดเมนของความสัมพันธ์ r คือเซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับในความสัมพันธ์ r และเรนจ์ของความสัมพันธ์ r คือเซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับในความสัมพันธ์ r

ตัวอย่าง 1.3.3 กำหนดให้ $X=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$$r=\{(x,y)\in X\times X / y=x^2\}$$

จะได้ว่า

$$D_r=\{0,1,2,3\}$$

$$R_r=\{0,1,4,9\}$$

□

บทนิยาม 1.3.4 อินเวอร์สของความสัมพันธ์ *r* คือ ความสัมพันธ์ที่ประกอบด้วยคู่อันดับ (*y*, *x*) โดยที่คู่อันดับ (*x*, *y*) อยู่ใน *r* เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ r^{-1} (อ่านว่าอินเวอร์สของความสัมพันธ์ *r*)

ตัวอย่าง 1.3.4 ถ้า $r=\{(1,3),(2,3),(3,4)\}$

จะได้ว่า $r^{-1}=\{(3,1),(3,2),(4,3)\}$

□

1.4 ฟังก์ชัน (Functions)

พิจารณาความสัมพันธ์ $r=\{(1,3),(2,3),(3,4)\}$ จะเห็นว่าคู่อันดับใน *r* ไม่มีสมาชิกตัวแรกซ้ำกันเลย เรียกความสัมพันธ์เช่นนี้ว่าฟังก์ชัน

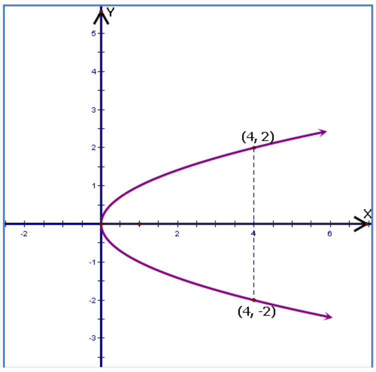
บทนิยาม 1.4.1 ฟังก์ชัน คือความสัมพันธ์ซึ่งแต่ละคู่อันดับซึ่งต่างกันจะไม่มีสมาชิกตัวแรกซ้ำกัน นั่นคือ

f จะเป็นฟังก์ชันก็ต่อเมื่อ *f* เป็นความสัมพันธ์ซึ่ง ถ้า $(x,y)\in f$ และ $(x,z)\in f$ แล้ว $y=z$

ตัวอย่าง 1.4.1 ความสัมพันธ์ $r_1=\{(1,2),(2,1),(3,1)\}$ เป็นฟังก์ชัน แต่ความสัมพันธ์ $r_2=\{(1,2),(1,3),(3,1)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะทั้ง (1, 2) และ (1, 3) อยู่ในความสัมพันธ์ r_2 ซึ่งถ้าสมาชิกตัวแรกเท่ากันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องเท่ากัน

□

ตัวอย่าง 1.4.2 .ให้ $r_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,y^2=x\}$ จะได้ว่า *r* ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะทั้ง (4, 2) และ (4, -2) ต่างก็เป็นสมาชิกของ *r* ไม่สอดคล้องกับบทนิยาม ดังรูป



จากกราฟของความสัมพันธ์เราอาจจะตรวจดูว่า ความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชันหรือไม่ โดยสังเกตว่าถ้าสามารถลากเส้นขนานแกน Y อย่างน้อยหนึ่งเส้นให้ตัดกราฟของความสัมพันธ์มากกว่าหนึ่ง จะสรุปได้ว่าความสัมพันธ์นั้นไม่ใช่ฟังก์ชัน

1.4.1 ชนิดของฟังก์ชัน

ตามที่กล่าวมาแล้วถึงความหมายของฟังก์ชัน ซึ่งพอสรุปได้ว่าความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B จะเป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B ก็ต่อเมื่อ

(i) โดเมนของ $f = A$

(ii) สมาชิกแต่ละตัวใน A จะต้องมีอิมเมจในเซต B และมีเพียงตัวเดียวเท่านั้น

ดังนั้นถ้า f เป็นฟังก์ชันแล้ว f อาจจะมีลักษณะแตกต่างกันได้หลายลักษณะ เช่น เรนจ์ของ f อาจจะเท่ากับ B หรืออาจจะไม่เท่ากับ B ก็ได้ หรืออาจจะมีสมาชิก $x_1, x_2 \in A$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$ แต่อิมเมจของ x_1 และ x_2 (คือ $f(x_1)$ และ $f(x_2)$) อาจจะเท่ากันก็ได้ ดังนั้นเราจึงจำแนกชนิดของฟังก์ชันตามลักษณะที่แตกต่างกันได้ดังต่อไปนี้

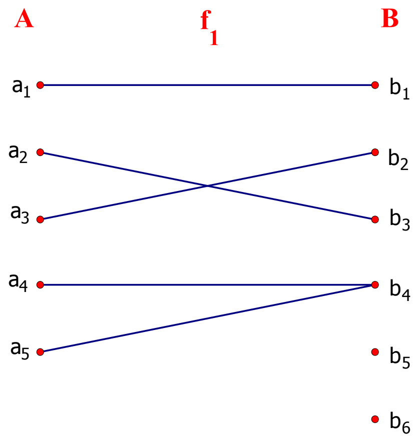
บทนิยาม 1.4.2 ถ้าให้ $f : A \longrightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน แล้ว เราจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันชนิด onto ถ้า เรนจ์ของ $f = f(A) = B$

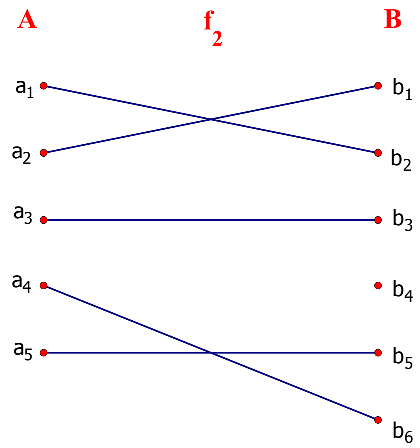
บทนิยาม 1.4.3 ถ้าให้ $f : A \longrightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน แล้ว เราจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันชนิด into หรือ strictly into ถ้า เรนจ์ของ $f = f(A) \subset B$

บทนิยาม 1.4.4 ถ้าให้ $f : A \longrightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน แล้ว เราจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันชนิด 1-1 (one to one) ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x_1, x_2 \in A$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$ แล้วจะได้ว่า $f(x_1) \neq f(x_2)$

บทนิยาม 1.4.5 ถ้าให้ $f : A \longrightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน แล้ว เราจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันชนิด many-to-one ถ้ามีสมาชิก $x_1, x_2 \in A$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$ แล้วทำให้ $f(x_1) = f(x_2)$

ตัวอย่าง 1.4.3 ถ้าให้ $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ และ $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$ และกำหนดให้ f_1, f_2 เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B ซึ่งมีลักษณะดังแผนภูมิข้างล่างต่อไปนี้

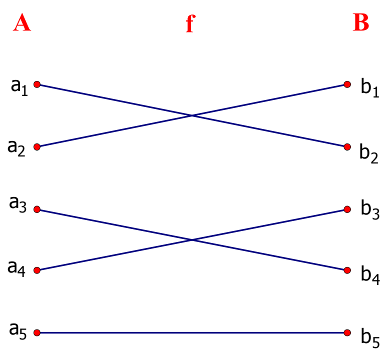




จะพบว่า f_1 เป็นฟังก์ชันชนิด many-to-one และ into ทั้งนี้เพราะ $f(a_4) = b_4 = f(a_5)$ และเรนจ์ของ $f_1 = \{b_1, b_2, b_3, b_4\} \subset B$ ในขณะเดียวกัน f_2 จะเป็นฟังก์ชันชนิด 1-1 แต่ยังคงเป็นฟังก์ชัน into อยู่ทั้งนี้เพราะเรนจ์ของ $f_2 = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\} \subset B$

□

ตัวอย่าง 1.4.4 กำหนดให้ $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ และ $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ และกำหนดฟังก์ชัน f จาก A ไปยัง B ดังนี้



จะพบว่า f เป็นฟังก์ชันชนิด 1-1 และ onto

□

บทนิยาม 1.4.6 ถ้า $f : A \longrightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ onto เราจะเขียนแทนสัญลักษณ์ ดังนี้

$$f : A \xrightarrow[1-1]{onto} B$$

และจะเรียก *f* ว่าเป็นการ สมนัยกันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one correspondence) และจะเรียก *A* และ B ว่าเป็นเซตที่มีความสมนัยกันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง

บทนิยาม 1.4.7 ให้ $f : A \longrightarrow B$ และ $g : B \longrightarrow C$ เป็นฟังก์ชัน เราจะให้ความหมายของฟังก์ชัน gof (อ่านว่า *g* composite *f*) ไว้ดังนี้ gof หมายถึง ฟังก์ชันจากเซต A ไปยังเซต C โดยมีเงื่อนไขว่า

$$(gof)(x) = g(f(x)) \quad \text{สำหรับ } x \in A$$

ตัวอย่าง 1.4.5 ให้ *R* แทนเซตของจำนวนจริง และให้ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ และ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่มีเงื่อนไขว่า $f(x) = x^2 + 1$ และ $g(x) = x^{20}$ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ ในที่นี้เราสามารถสร้างได้ทั้งฟังก์ชัน gof และ fog ซึ่งเป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปยัง $\mathbb{R}$ และมีเงื่อนไขดังนี้

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^{20}$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^{20}) = x^{40} + 1$$

□

แบบฝึกหัดบทที่ 1

1. จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน ซึ่งกำหนด $g(x) : R \longrightarrow R, f(x) : R \longrightarrow R$ โดย

   1.1 $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

   1.2 $g(x) = x^2$

   1.3 $f(x) = |x|$

   1.4 $f(x) = \sqrt{x - 1}$

2. จงตรวจดูว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

   2.1 $\{(x, y) \in R \times R \mid y = x^3\}$

   2.2 $\{(x, y) \in R \times R \mid 16x^2 + 9y^2 = 1\}$

3. ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันชนิดใดบ้าง

   3.1 $f(x) = |x|$

   3.2 $f(x) = 2x + 7$

   3.3 $f(x) = \sin(x)$

   3.4 $f(x) = x^3$