บทที่ 2
ความรู้พื้นฐานของฟังก์ชันอดิศัย

ความรู้พื้นฐานของฟังก์ชันอดิศัย (transcendental function) มีความสำคัญและจำเป็นในการนำไปประยุกต์ใช้กับการคำนวณทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต (algebraic function) ฟังก์ชันอดิศัยประกอบด้วย ฟังก์ชันชี้กำลัง ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก เป็นต้น ในเนื้อหานี้จะกล่าวถึงเฉพาะบางฟังก์ชันที่เรามักพบบ่อยและสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับฟังก์ชันอดิศัยอื่นๆ ได้

2.1 ฟังก์ชันเลขชี้กำลังและลอการิทึม (Exponential and Logarithmic Functions)

2.1.1 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (Exponential Function)

บทนิยาม 2.1.1 ให้ x เป็นตัวแปรต้น y เป็นตัวแปรตาม และ a เป็นค่าคงตัวใดๆ ที่ $a>0,\ a\neq 1$ ฟังก์ชันเลขชี้กำลังเขียนอยู่ในรูป

$$y=a^{x}$$

เรียก a ว่า **ฐาน (base)** ซึ่งเป็นค่าคงตัว

เรียก x ว่า **เลขชี้กำลัง (exponent)** ซึ่งเป็นตัวแปร

โดยทั่วไปการเขียนฟังก์ชัน เรามักจะกำหนดให้ $y=f(x)$ หรือใช้อักษรอื่นๆ แทน f เช่น g, h, F, G, H (ในทำนองเดียวกันตัวแปร x และ y สามารถใช้อักษรอื่นๆ แทนได้เช่นกัน) เช่น

(1) จากฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $y=2^{x}$ เขียนแทนด้วย $f(x)=2^{x}$

(2) จากฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $y=3^{x}$ เขียนแทน $g(x)=3^{x}$

(3) จากฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{t}$ เขียนแทน $F(t)=\left(\frac{1}{2}\right)^{t}$

กราฟของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

กราฟของฟังก์ชันเลขชี้กำลังมี 2 แบบ คือ

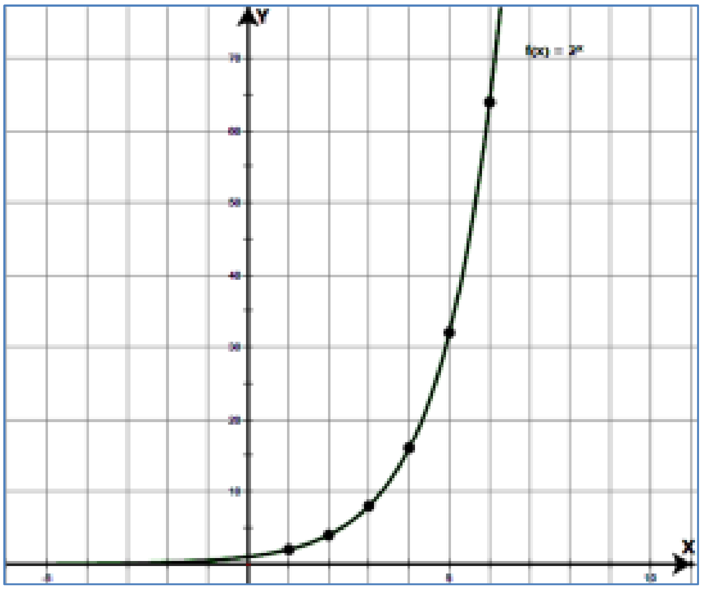
ให้ $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ ถ้า x (ตัวแปรต้น) มีค่าเพิ่มขึ้น แล้ว y (ตัวแปรตาม) มีค่าเพิ่มขึ้นด้วยเสมอ เราเรียกฟังก์ชันที่มีสมบัตินี้ว่า **ฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function)**

ให้ $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ ถ้า x (ตัวแปรต้น) มีค่าเพิ่มขึ้น แต่ y (ตัวแปรตาม) มีค่าลดลง เราเรียกฟังก์ชันที่มีสมบัตินี้ว่า **ฟังก์ชันลด (decreasing function)**

พิจารณาตารางของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $y = 2^{x}$ ต่อไปนี้

x	1	2	3	4	5	6	x เพิ่มขึ้น
y	2	4	8	16	32	64	y เพิ่มขึ้น

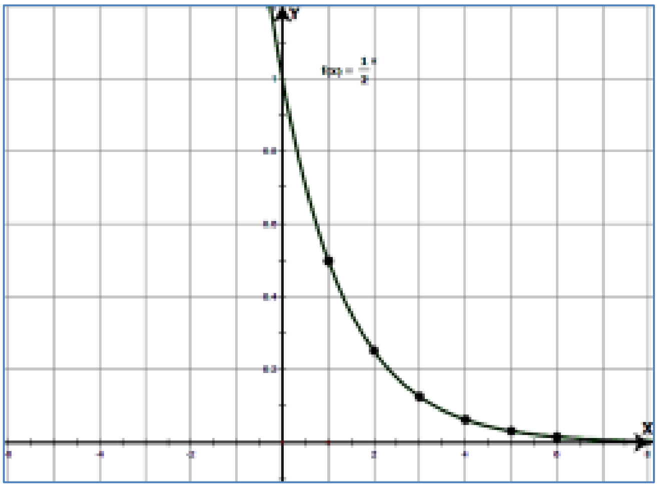
กราฟของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $y = 2^x$ เป็นดังนี้



พิจารณาตารางของฟังก์ชัน $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ต่อไปนี้

x	1	2	3	4	5	6	x เพิ่มขึ้น
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	y ลดลง

กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ เป็นดังนี้



สมบัติของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (Properties of Exponential Function)

ให้ a, b, x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่เป็นศูนย์ จะได้ว่า

PE1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

PE2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

PE3. $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

PE4. $\left(a \cdot b\right)^x = a^x \cdot b^x$

PE5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

PE6. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ หรือ $\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$

PE7. $a^0 = 1$

นอกจากนี้ยังมีฟังก์ชันชี้กำลังฐาน e ซึ่ง e = 2.718281828... หรือค่าโดยประมาณ 2.71828

ตัวอย่าง 2.1.1 จงแก้สมการ $4^x = 16$

วิธีทำ จากโจทย์ กำหนดให้ $4^x = 16$

จัดรูปใหม่เป็น

$$4^x = 4^2$$

นั่นคือ x = 2

□

ตัวอย่าง 2.1.2 จงแก้สมการ $4^{3x-1} = \dfrac{1}{16^x}$

วิธีทำ จากโจทย์ กำหนดให้ $4^{3x-1} = \frac{1}{16^x}$

จัดรูปใหม่เป็น

$$4^{3x-1} = 16^{-x}$$
$$4^{3x-1} = \left(4^2\right)^{-x}$$
$$4^{3x-1} = 4^{-2x}$$

ดังนั้น จะได้ $3x-1 = -2x$

$$3x+2x = 1$$
$$5x = 1$$
$$x = \frac{1}{5}$$

นั่นคือ $x = \frac{1}{5}$

□

ตัวอย่าง 2.1.3 จงแก้สมการ $3^{2x} - 4\cdot 3^{x+1} + 27 = 0$

วิธีทำ จากโจทย์ กำหนดให้ $3^{2x} - 4\cdot 3^{x+1} + 27 = 0$

จัดรูปใหม่เป็น

$$\left(3^x\right)^2 - 4\cdot 3^x\cdot 3^1 + 27 = 0$$
$$\left(3^x\right)^2 - 12\cdot 3^x + 27 = 0$$
$$\left(3^x - 3\right)\left(3^x - 9\right) = 0$$

ดังนั้น จะได้ $3^x - 3 = 0$ หรือ $3^x - 9 = 0$

$3^x = 3^1$ $\quad$ $3^x = 9 = 3^2$

$x = 1$ $\quad$ $x = 2$

ดังนั้น $x = 1$ หรือ 2

□

ตัวอย่าง 2.1.4 จงแก้สมการ $8^{x+2} = 4^x$

วิธีทำ จากโจทย์ กำหนดให้ $8^{x+2} = 4^x$

จัดรูปใหม่เป็น

$$\left(2^3\right)^{x+2} = \left(2^2\right)^x$$
$$\left(2\right)^{3(x+2)} = \left(2\right)^{2x}$$

ดังนั้น จะได้ว่า $3(x+2) = 2x$

$$3x+6=2x$$
$$3x-2x=-6$$
$$x=-6$$

นั่นคือ $x=-6$

□

ตัวอย่าง 2.1.5 จงแก้สมการ $2^x-2^{x+1}+1=0$

วิธีทำ จากโจทย์ กำหนดให้ $2^x-2^{x+1}+1=0$

จัดรูปใหม่เป็น

$$2^x-2^x\cdot 2^1+1=0$$
$$2^x-2\cdot 2^x+1=0$$
$$(1-2)2^x+1=0$$
$$-2^x+1=0$$
$$1=2^x$$
$$2^0=2^x$$
$$x=0$$

นั่นคือ $x=0$

□

2.1.2 ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithmic Function)

บทนิยาม 2.1.2 ฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชันผกผัน (inverse function) ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

จากฟังก์ชันชี้กำลัง $y=a^x$, $a>0$ และ $a\neq 1$ ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันชี้กำลัง ซึ่งเป็นฟังก์ชันลอการิทึม คือ

$x=a^y$ โดยที่ $a>0$ และ $a\neq 1$

และ $y=\log_a x$

โดยทั่วไปมักเขียนให้อยู่ในรูป $y=f(x)=\log_a x$

สมบัติของฟังก์ชันลอการิทึมฐาน a

$y=\log_a x$ ก็ต่อเมื่อ $x=a^y$

เช่น

$\log_3 8 = 3$	ก็ต่อเมื่อ	$8 = 2^3$
$\log_3 9 = 2$	ก็ต่อเมื่อ	$9 = 3^2$
$\log_3 \frac{1}{3} = -1$	ก็ต่อเมื่อ	$\frac{1}{3} = 3^{-1}$
$\log_3 x = 2$	ก็ต่อเมื่อ	$x = 3^2$
$\log_a b = 5$	ก็ต่อเมื่อ	$b = a^5$

เป็นต้น

ตัวอย่าง 2.1.6 จงหาค่าของ $\log_2 16 = y$

วิธีทำ กำหนดให้ $\log_2 16 = y$

จะได้ $16 = 2^y$

$$2^4 = 2^y$$

ดังนั้น จะได้ $y = 4$

นั่นคือ $\log_2 16 = 4$

□

ตัวอย่าง 2.1.7 จงหาค่าของ $\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{81}$

วิธีทำ กำหนดให้ $\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{81} = y$

จะได้

$$\frac{1}{81} = \left(\frac{1}{9}\right)^y$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^2 = \left(\frac{1}{9}\right)^y$$

ดังนั้น $y = 2$

นั่นคือ $\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{81} = 2$

□

ตัวอย่าง 2.1.8 จงหาค่าของ $\log_{\frac{1}{3}} 81$

วิธีทำ กำหนดให้ $\log_{\frac{1}{3}} 81 = y$

จะได้

$$81 = \left(\frac{1}{3}\right)^{y}$$

$$3^{4} = 3^{-y} \quad \text{หรือ} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^{y}$$

ดังนั้น จะได้ $y = -4$

นั่นคือ $\log_{\frac{1}{3}} 81 = -4$

□

ตัวอย่าง 2.1.9 จงหาค่าของ $\log_5 \frac{1}{125}$

วิธีทำ กำหนดให้ $\log_5 \frac{1}{125} = y$

จะได้ $\frac{1}{125} = 5^{y}$

$$\frac{1}{5^{3}} = 5^{y}$$

$$5^{-3} = 5^{y}$$

ดังนั้น จะได้ $y = -3$

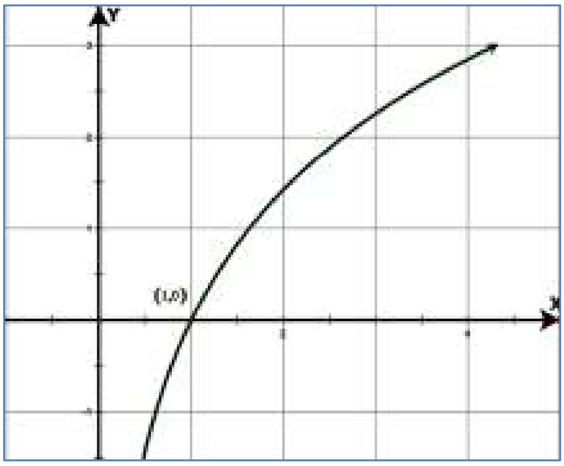
นั่นคือ $\log_5 \frac{1}{125} = -3$

□

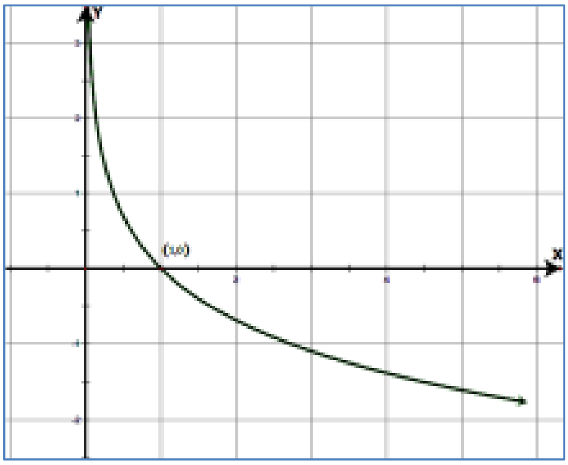
กราฟของฟังก์ชันลอการิทึม

ฟังก์ชันลอการิทึม $y = \log_a x$ เป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function)** เมื่อ $a > 1$

ฟังก์ชันลอการิทึม $y = \log_a x$ เป็น**ฟังก์ชันลด (decreasing function)** เมื่อ $0 < a < 1$

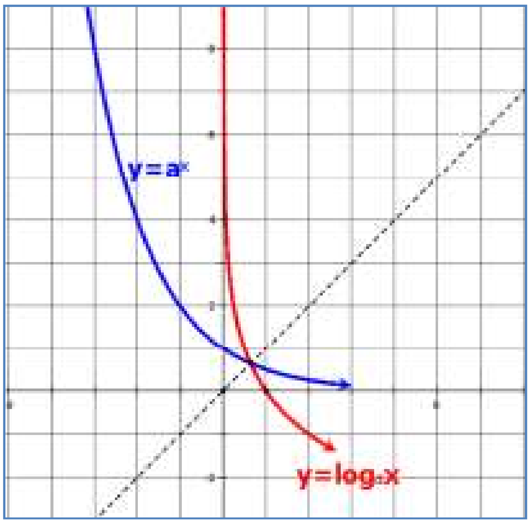


$a > 1$

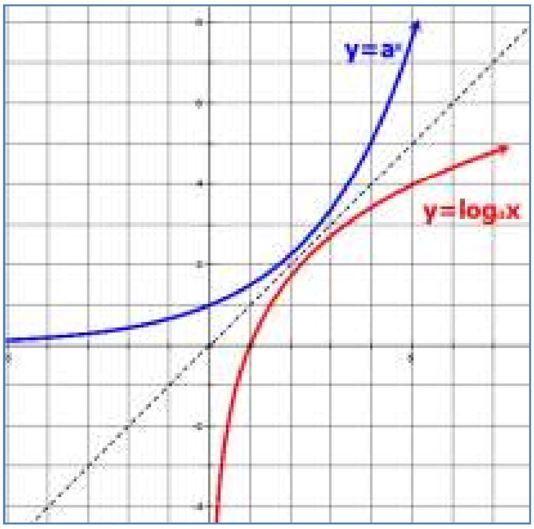


$0 < a < 1$

เปรียบเทียบกราฟของฟังก์ชันลอการิทึมกับกราฟของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง



$0 < a < 1$



$a > 1$

สมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม (Properties of Logarithmic Function)

กำหนดให้ $x > 0, y > 0, a > 0$ และ $a \neq 0$ สมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

PL1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

PL2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

PL3. $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริงใดๆ

PL4. $\log_a a = 1$

PL5. $\log_a 1 = 0$

PL6. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ เมื่อ $b > 0$ และ $b \neq 1$

PL7. $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $n \neq 1$

PL8. $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$

PL9. $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$ เมื่อ $x \neq 1$

PL10. $a^{\log_a x} = x$

ตัวอย่าง 2.1.10 จงหาค่าของ $\log_7 343$

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ $\log_7 343$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\log_7 343 &= \log_7 7^3 \\
&= 3 \cdot \log_7 7 \\
&= 3 \cdot 1 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $\log_7 343 = 3$

□

ตัวอย่าง 2.1.11 จงหาค่าของ $\log_8 32$

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ $\log_8 32$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\log_8 32 &= \log_{2^3} 2^5 \\
&= \frac{\log_2 2^5}{\log_2 2^3} \\
&= \frac{5 \cdot \log_2 2}{3 \cdot \log_2 2} \\
&= \frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $\log_8 32 = \frac{5}{3}$

□

ตัวอย่าง 2.1.12 จงหาค่าของ $\log_{16} 2$

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ $\log_{16} 2$

จะได้ว่า

$$\log_{16} 2 = \log_{2^4} 2$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \log_2 2$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{4}$$

นั่นคือ $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$

□

ตัวอย่าง 2.1.13 จงหาค่าของ $\log_{\frac{1}{3}} 81$

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ $\log_{\frac{1}{3}} 81$

จะได้ว่า

$$\log_{\frac{1}{3}} 81 = \log_{3^{-1}} 3^4$$

$$= \frac{4}{-1} \cdot \log_3 3$$

$$= -4 \cdot \log_3 3$$

$$= -4 \cdot 1$$

นั่นคือ $\log_{\frac{1}{3}} 81 = -4$

□

ตัวอย่าง 2.1.14 จงหาค่าของ $\log_{12} 4 + \log_{12} 3$

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ $\log_{12} 4 + \log_{12} 3$

จะได้ว่า

$$\log_{12} 4 + \log_{12} 3 = \log_{12} 4 \cdot 3$$

$$= \log_{12} 12$$

$$= 1$$

นั่นคือ $\log_{12} 4 + \log_{12} 3 = 1$

□

ตัวอย่าง 2.1.15 จงหาค่าของ $9^{\log_3 12}$

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ $9^{\log_3 12}$

จะได้ว่า

$$9^{\log_3 12} = 3^{2(\log_3 12)}$$
$$= 3^{\log_3 12^2}$$
$$= 12^2$$

นั่นคือ $9^{\log_3 12} = 144$

□

ตัวอย่าง 2.1.16 จงหาค่าของ $\log_7 147 - \log_7 3$

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ $\log_7 147 - \log_7 3$

จะได้ว่า

$$\log_7 147 - \log_7 3 = \log_7 \frac{147}{3}$$
$$= \log_7 49$$
$$= \log_7 7^2$$
$$= 2 \cdot \log_7 7$$
$$= 2 \cdot 1$$

นั่นคือ $\log_7 147 - \log_7 3 = 2$

□

ลอการิทึมสามัญ (Common Logarithms)

บทนิยาม 2.1.3 ลอการิทึมสามัญ คือ ลอการิทึมที่มีฐาน เท่ากับ 10

ลอการิทึมสามัญ $\log_{10} x$ นิยมเขียนแทนด้วย $\log x$

เช่น $\log_{10} 12$ นิยมเขียนแทนด้วย $\log 12$

$\log_{10} \frac{3}{4}$ นิยมเขียนแทนด้วย $\log \frac{3}{4}$

เป็นต้น

ตัวอย่าง 2.1.17 จงหาค่าของ $(0.1)^{\log 3}$

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ $(0.1)^{\log 3}$

จะได้ว่า

$$(0.1)^{\log 3} = (10^{-1})^{\log 3}$$

$$(0.1)^{\log 3} = (10^{-1})^{\log 3}$$
$$= (10)^{-\log 3}$$

$$= (10)^{\log 3^{-1}}$$
$$= 3^{-1}$$

นั่นคือ $(0.1)^{\log 3} = \dfrac{1}{3}$

□

ลอการิทึมธรรมชาติ (Natural Logarithms)

บทนิยาม 2.1.4 ลอการิทึมธรรมชาติ คือ ลอการิทึมที่มีฐาน เท่ากับ e โดยที่ e มีค่าประมาณ 2.71828

ลอการิทึมธรรมชาติ หรือเรียกอีกอย่างว่า ลอการิทึมแบบเนเปียร์ (Napierian Logarithms) กำหนดให้แทนด้วยสัญลักษณ์ $\ln N$

นั่นคือ $\log_e N = \ln N$

การหาค่าลอการิทึมธรรมชาติ

ใช้สมบัติได้เหมือนกับลอการิทึมฐานทั่วๆไป หรือใช้การเปิดตารางหาค่าก็ได้

1. ใช้ตารางลอการิทึมสามัญ

จะต้องเปลี่ยนลอการิทึมธรรมชาติให้เป็นลอการิทึมสามัญ ดังนี้

$$\ln N = \frac{\log N}{\log e}$$

$$\ln N = \frac{1}{\log e}\log N ; \frac{1}{\log e} \approx 2.3026$$

$$\ln N = 2.3026 \cdot \log N$$

2. ใช้ตารางลอการิทึมธรรมชาติ

เปิดหาค่า $\ln N$ ถ้า $N < 1$ หรือ $N > 10$ เราจะต้องเปลี่ยน N ให้อยู่ในช่วง $1 \le N_0 \le 10$ ดังนี้

$$\ln N = \ln\left(N_0 \times 10^n\right)$$

$$\ln N = \ln N_0 + \ln 10^n$$

$$\ln N = \ln N_0 + n \cdot \ln 10$$

ตัวอย่าง 2.1.18 จงหาค่าของ $\ln 13$

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ สามารถหา $\ln 13$ ได้ 2 แบบ ดังนี้

แบบที่ 1 ใช้ตารางลอการิทึมสามัญ

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\ln 13 &= (2.3026)\cdot\log 13\\ &= (2.3026)\cdot\log(1.3\times 10)\\ &= (2.3026)(\log 1.3+\log 10)\\ &= (2.3026)(\log 1.3+1)\\ &= (2.3026)(0.1139+1)\\ &= 2.5648\end{aligned}$$

แบบที่ 2 ใช้ตารางลอการิทึมธรรมชาติ

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\ln 13 &= \ln(1.3\times 10)\\ &= \ln 1.3+\ln 10\\ &= 0.2624+2.3026\\ &= 2.5650\end{aligned}$$

จากการหาค่าของ $\ln 13$ ทั้ง 2 แบบ พบว่าคำตอบที่ได้มีค่าโดยประมาณเท่ากัน

นั่นคือ $\ln 13 \approx 2.5650$

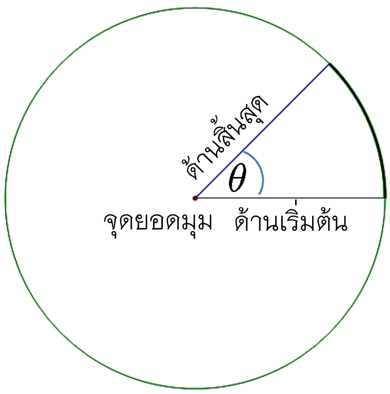
□

2.2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Function)

ในส่วนนี้จะอธิบายเกี่ยวกับมุมและการวัดมุม นิยามและสมบัติของฟังก์ชันตรีโกณมิติ การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ การแก้ปัญหาของสมการตรีโกณมิติ และกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

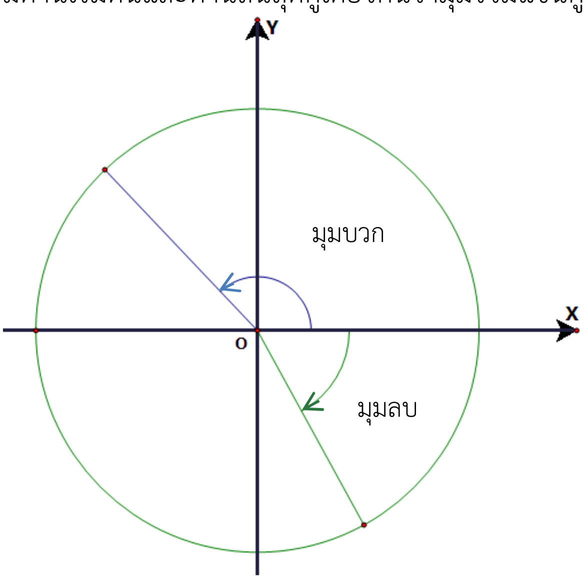
2.2.1 มุมและการวัดมุม (Angles and angles measure)

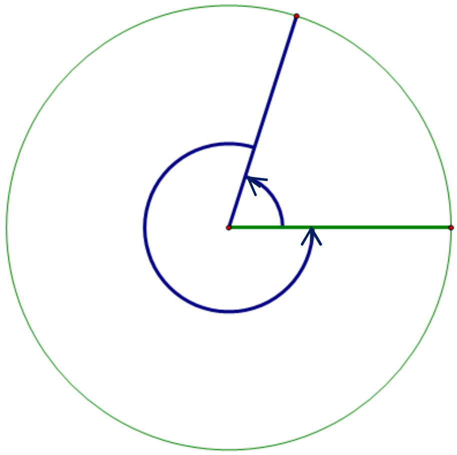
การศึกษาฟังก์ชันตรีโกณมิติจะเกี่ยวข้องกับมุมทั้งสองหน่วยคือมุมในหน่วยองศาและหน่วยเรเดียน มุมเกิดจาก 3 ส่วนประกอบกัน คือ ด้านเริ่มต้น (Initial side) จุดยอด (Vertex) และด้านสิ้นสุด (Terminal side) ดังรูป



มุมเกิดจากการหมุนรังสีที่จุดปลายของรังสี ตำแหน่งเริ่มต้นของรังสีเรียกว่าด้านเริ่มต้นของมุม และตำแหน่งของรังสีหลังจากการหมุนเรียกว่า ด้านสิ้นสุด จุดเริ่มต้นของรังสีทั้งสองเรียกว่าจุดยอดมุม เราสามารถวางมุมบนระบบพิกัดฉากได้พอดีโดยให้จุดกำเนิดเป็นจุดยอด และด้านเริ่มต้น
ซ้อนทับบนแกน X ทางด้านบวก มุมที่จัดวางแบบนี้เรียกว่า มุมในตำแหน่งมาตรฐาน (Standard position) **มุมบวก** (Positive angles) คือ มุมที่เกิดจากการหมุนด้านเริ่มต้นในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา **มุมลบ**

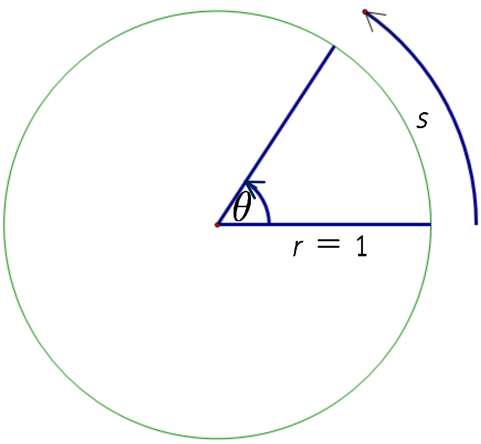
(Negative angles) คือ มุมที่เกิดจากการหมุนด้านเริ่มต้นในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ชื่อของมุมนิยมเขียนแทนด้วยอักษรกรีก เช่น $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ เป็นต้น หรืออักษรตัวพิมพ์ใหญ่ A,B,C,D เป็นต้น และเราจะเรียกมุมที่มีด้านเริ่มต้นและด้านสิ้นสุดคู่เดียวกันว่ามุมร่วมแขนคู่ (Coterminal)

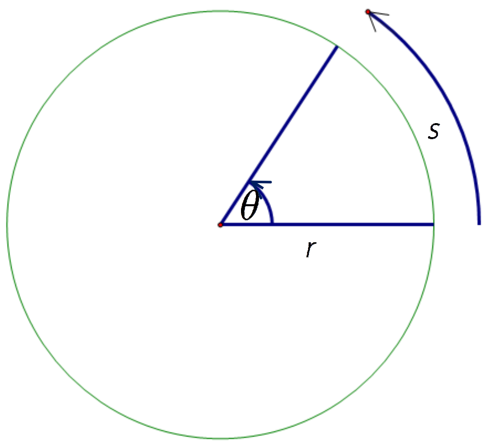




พิจารณา θ เป็นมุมศูนย์กลางวงกลมรัศมี (r) 1 หน่วย การวัดมุมเรเดียนก็คือความยาวของส่วนโค้งของเซคเตอร์ เพราะว่าความยาวเส้นรอบวงของวงกลม เท่ากับ $2\pi r$ ดังนั้นความยาวเส้นรอบวงของวงกลมรัศมี 1 หน่วย เท่ากับ 2π นั่นคือ $360^\circ = 2\pi$ เรเดียน

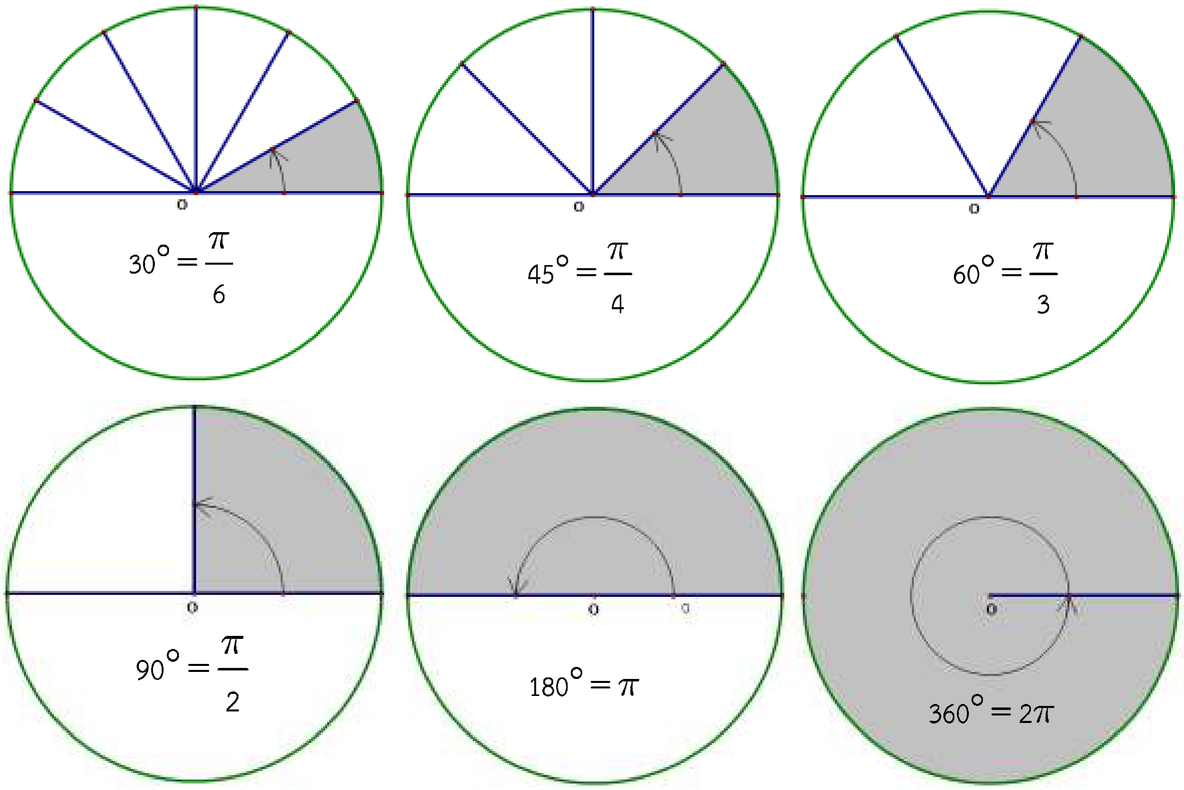
การวัดเรเดียนของมุม θ คือความยาวส่วนโค้งเซคเตอร์รัศมี r นั่นคือ $s = r\theta$ ดังรูป





$s = \theta$ $\qquad$ $s = r\theta$

สิ่งที่ควรรู้คือการแปลงมุมร่วมระหว่างมุมองศากับมุมเรเดียนโดยใช้ความจริงที่ว่า $180^\circ = \pi$ เรเดียน จะได้ดังรูป



ตัวอย่าง 2.2.1 การแปลงระหว่างมุมองศากับเรเดียน

ก. $40^\circ = (40 \text{ องศา})\left(\dfrac{\pi \text{ เรเดียน}}{180 \text{ องศา}}\right) = \dfrac{2\pi}{9}$

ข. $-270^\circ = (-270^\circ \text{องศา})\left(\dfrac{\pi \text{ เรเดียน}}{180 \text{ องศา}}\right) = -\dfrac{3\pi}{2}$

ค. $-\dfrac{\pi}{2} \text{ เรเดียน} = \left(-\dfrac{\pi}{2} \text{ เรเดียน}\right)\dfrac{180 \text{ องศา}}{\pi \text{ เรเดียน}} = -90^\circ$

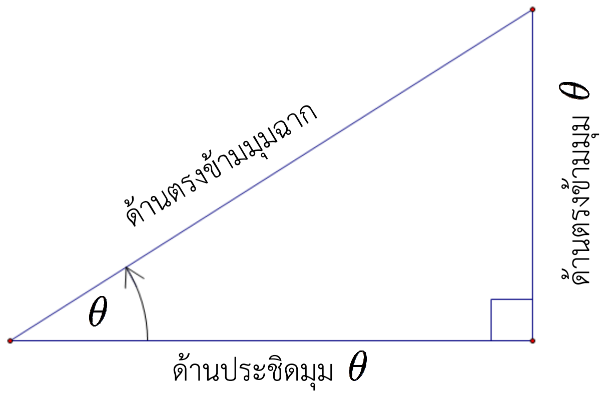
ง. $\dfrac{9\pi}{2} \text{ เรเดียน} = \left(\dfrac{9\pi}{2} \text{ เรเดียน}\right)\dfrac{180 \text{ องศา}}{\pi \text{ เรเดียน}} = 810^\circ$

□

2.2.2 นิยามและเอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

มีวิธีการศึกษาฟังก์ชันตรีโกณมิติทั่วไปมี 2 วิธี ดังนี้ วิธีที่ 1 คือ ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่นิยามด้วยอัตราส่วนของ 2 ด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก วิธีที่ 2 คือ ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่นิยามในพจน์ของจุดบนด้านสิ้นสุดของสามเหลี่ยมในตำแหน่งมาตรฐาน (Standard position) กำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติ 6 ฟังก์ชัน คือ ไซน์ (Sine) โคไซน์ (Cosine) แทนเจนต์ (Tangent) โคแทนเจนต์ (Cotangent) ซีแคนต์ (Secant) และโคซีแคนต์ (Cosecant) ซึ่งนิยามได้ 2 แบบ คือ นิยามด้วยสามเหลี่ยมมุมฉากและนิยามด้วยฟังก์ชันวงกลมต่อไปนี้

กำหนดสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุมมุมหนึ่งเป็น θ ซึ่ง $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ ดังรูป

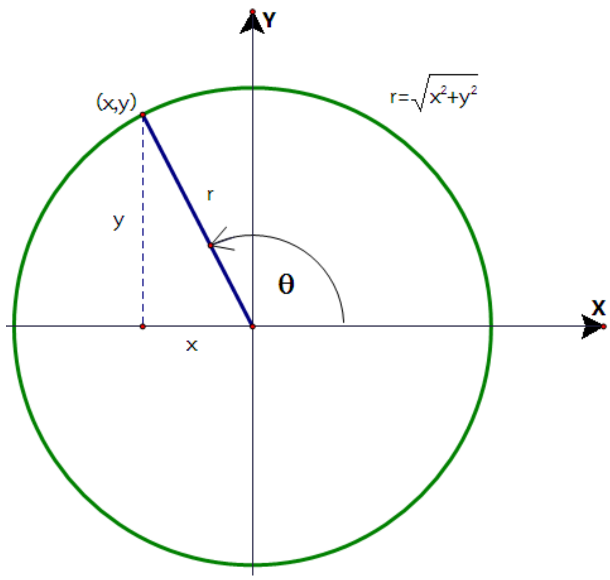


นิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติจากอัตราส่วนของ 2 ด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังนี้

$$\sin\theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}\,\theta}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} \quad \cos\theta = \frac{\text{ด้านประชิดมุม}\,\theta}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} \quad \tan\theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}\,\theta}{\text{ด้านประชิดมุม}\,\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ด้านตรงข้ามมุม}\,\theta} \quad \sec\theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ด้านประชิดมุม}\,\theta} \quad \cot\theta = \frac{\text{ด้านประชิดมุม}\,\theta}{\text{ด้านตรงข้ามมุม}\,\theta}$$

กำหนดให้ θ เป็นมุมใดๆ ในวงกลมรัศมี r หน่วย ดังรูป



นิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติด้วยฟังก์ชันของวงกลม ดังนี้

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad \cos\theta = \frac{x}{r} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} \quad \sec\theta = \frac{r}{x} \quad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

เอกลักษณ์พีธาโกรัส

(Pythagorean identities)

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

การรวมหรือผลต่างของมุม 2 มุม

(Sum or Difference of two angles)

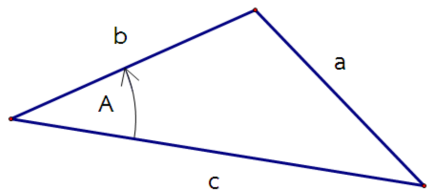
$\sin(\theta \pm \phi) = \sin\theta\cos\phi \pm \cos\theta\sin\phi$

$\cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta\cos\phi \mp \sin\theta\sin\phi$

$\tan(\theta \pm \phi) = \dfrac{\tan\theta \pm \tan\phi}{1 \mp \tan\theta\tan\phi}$

กฎของโคไซน์ (Law of Cosine)

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$



สูตรลดทอน (Reduction formulas)

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\sin(\theta) = -\sin(\theta - \pi)$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\cos\theta = -\cos(\theta - \pi)$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

$\tan(\theta) = \tan(\theta - \pi)$

สูตรครึ่งมุม (Half-Angle formulas)

$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$

$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$

สูตรสองเท่าของมุม (Double-Angle formulas)

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$= 1 - 2\sin^2\theta$

$= \cos^2\theta - \sin^2\theta$

เอกลักษณ์ส่วนกลับ (Reciprocal Identities)

$\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

เอกลักษณ์ผลหาร (Quotient Identities)

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

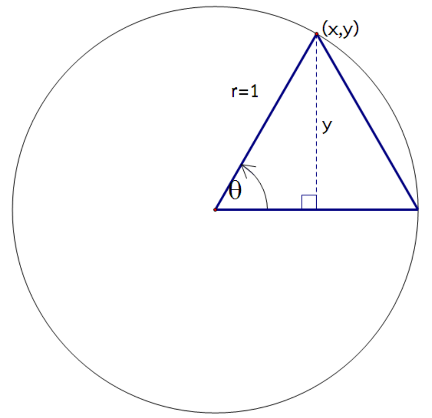
$\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

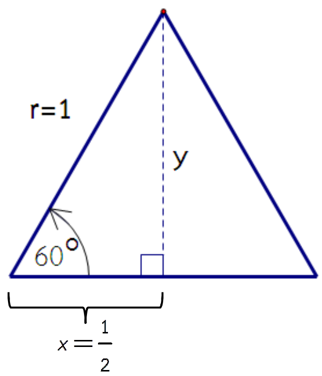
2.2.3 การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติมี 2 วิธี คือ วิธีที่ 1 เป็นการประมาณค่าทศนิยมด้วยเครื่องคำนวณ (หรือตารางค่าตรีโกณมิติ) และวิธีที่ 2 เป็นการหาค่าแม่นตรงโดยใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติและสูตรเรขาคณิต ขณะที่ใช้เครื่องคำนวณเพื่อหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ ควรจำเพื่อเซตเครื่องคำนวณในโหมดที่เหมาะสม (โหมดองศาหรือเรเดียน)

ตัวอย่างที่ 2.2.2 จงหาค่าแม่นตรงของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ ของมุม $\dfrac{\pi}{3}$ เรเดียน

วิธีทำ เริ่มด้วยการวาดมุม $\theta=\frac{\pi}{3}$ ในตำแหน่งมาตรฐาน ดังรูป





เพราะว่า $60^\circ=\frac{\pi}{3}$ เรเดียน ดังนั้นเราสามารถวาดสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีด้านยาว 1 หน่วย และมีมุมเป็น θ และเพราะว่าความสูงขอสามเหลี่ยมแบ่งครึ่งฐานของมัน เรารู้ว่า $x=\frac{1}{2}$

ใช้ทฤษฎีบทพีธาโกรัส จะได้ว่า

$$y=\sqrt{r^2-x^2}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

เรารู้ค่า x, y และ r แล้วแทนในสูตร จะได้ว่า

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}/2}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{x}{r}=\frac{1/2}{1}=\frac{1}{2}$$

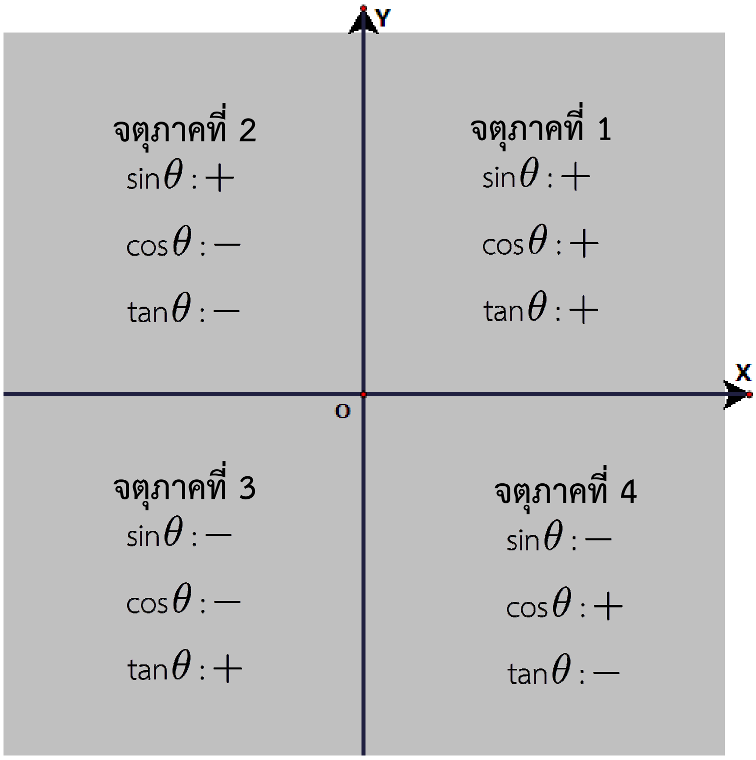
$$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}=\sqrt{3}$$

□

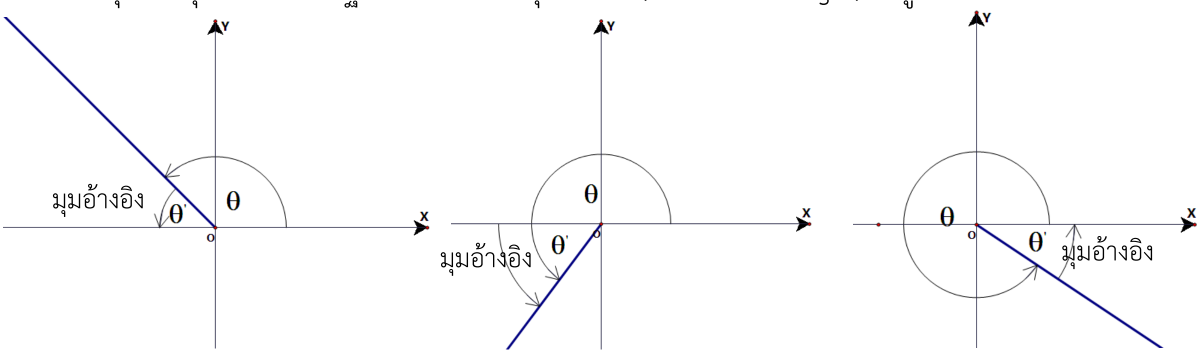
การวัดองศาและเรเดียนของมุมต่างๆ ดังตารางด้านล่าง แสดงความสอดคล้องของค่าไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ในจตุภาคที่ 1

องศา	0°	30°	45°	60°	90°
เรเดียน	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ไม่นิยาม

สัญลักษณ์ในแต่ละจตุภาคของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ ดังตารางข้างล่างต่อไปนี้



ต่อไปจะใช้ความรู้เกี่ยวกับมุมประกอบหนึ่งมุมฉาก (Complementary angle) และมุมประกอบสองมุมฉาก (Supplementary angle) สำหรับการหาค่าของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ ในแต่ละจตุภาค โดยใช้ค่าของมุมในจตุภาคที่ 1 เป็นฐาน เป็นการใช้มุมอ้างอิง (Reference angle) ดังรูป



จตุภาคที่ 2	จตุภาคที่ 3	จตุภาคที่ 4
$\theta' = \pi - \theta$ (เรเดียน)	$\theta' = \theta - \pi$ (เรเดียน)	$\theta' = 2\pi - \theta$ (เรเดียน)
$\theta' = 180^\circ - \theta$ (องศา)	$\theta' = \theta - 180^\circ$ (องศา)	$\theta' = 360^\circ - \theta$ (องศา)

ตัวอย่าง 2.2.3 จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ต่อไปนี้

i) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ ii) $\sec 60^\circ$ iii) $\cos(1.2)$

วิธีทำ i) ใช้สูตรลดทอน $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ จะได้ว่า

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ii) ใช้เอกลักษณ์ส่วนกลับ $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$ จะได้ว่า

$$\sec 60^\circ=\frac{1}{\cos 60^\circ}=\frac{1}{1/2}=2$$

iii) ใช้เครื่องคำนวณ จะได้ว่า

$$\cos(1.2)\approx 0.3624$$

(จำไว้ว่า 1.2 เป็นการวัดในหน่วยเรเดียน ดังนั้นต้องเซตเครื่องคำนวณให้อยู่ในโหมดเรเดียน)

□

2.2.4 การแก้ปัญหาของสมการตรีโกณมิติ

เราจะหาคำตอบของสมการ $\sin\theta=0$ ได้อย่างไร เรารู้ว่า $\theta=0$ เป็นคำตอบหนึ่ง แต่ไม่ใช่เพียงคำตอบเดียว แต่ละคำตอบต่อไปนี้เป็นค่าของ θ ที่ทำให้สมการเป็นจริง

$$\ldots,-3\pi,-2\pi,-\pi,0,\pi,2\pi,3\pi,\ldots$$

สามารถเขียนเป็นเซตคำตอบที่ไม่จำกัด คือ $\{n\pi : n$ เป็นจำนวนเต็ม$\}$

ตัวอย่าง 2.2.4 จงหาคำตอบของ θ จากสมการตรีโกณมิติที่กำหนดให้

$$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

วิธีทำ การหาคำตอบของสมการควรพิจารณาค่าไซน์ที่เป็นลบในจตุภาคที่ 3 และจตุภาคที่ 4

ซึ่งเราทราบว่า $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ดังนั้น ต้องหาค่าของ θ ในจตุภาคที่ 3 และจตุภาคที่ 4 ที่มีมุมอ้างอิง

คือ $\dfrac{\pi}{3}$ ที่อยู่ในช่วง $[0,2\pi]$ จะได้ว่า

$$\theta=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3} \text{ และ } \theta=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$$

กรณีมุมเป็นจำนวนหลายเท่าของ 2π จะได้คำตอบอยู่ในรูปทั่วไป คือ

$$\theta=\frac{4\pi}{3}+2n\pi \text{ หรือ } \theta=\frac{5\pi}{3}+2n\pi$$

□

ตัวอย่าง 2.2.5 จงหาคำตอบของ θ จากสมการตรีโกณมิติที่กำหนดให้

$$\cos 2\theta=2-3\sin\theta \text{ โดยที่ } 0\le\theta\le 2\pi$$

วิธีทำ ใช้เอกลักษณ์สองเท่าของมุม $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$ สามารถเขียนสมการใหม่เป็นดังนี้

$$\cos 2\theta=2-3\sin\theta$$

$$1-\sin^2\theta=2-3\sin\theta$$

$$0=2\sin^2\theta-3\sin\theta-3\sin\theta+1$$

$$0=(2\sin\theta-1)(\sin\theta-1)$$

ดังนั้น ถ้า $2\sin\theta-1=0$ จะได้ว่า $\sin\theta=\frac{1}{2}$ ทำให้ได้ว่า $\theta=\frac{\pi}{6}$ หรือ $\theta=\frac{5\pi}{6}$

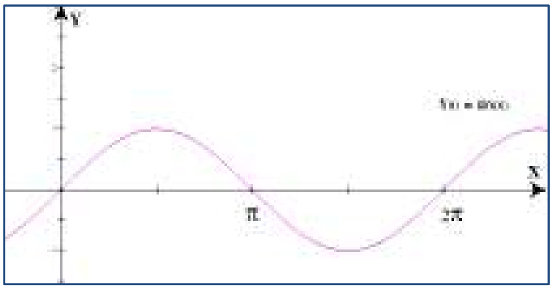
และถ้า $\sin\theta-1=0$ จะได้ว่า $\sin\theta=1$ ทำให้ได้ว่า $\theta=\frac{\pi}{2}$

นั่นคือ สำหรับ $0\leq\theta\leq2\pi$ มีคำตอบ 3 คำตอบ คือ $\theta=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$ หรือ $\frac{\pi}{2}$

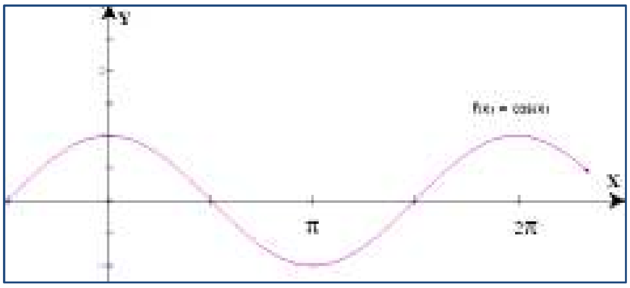
□

2.2.5 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

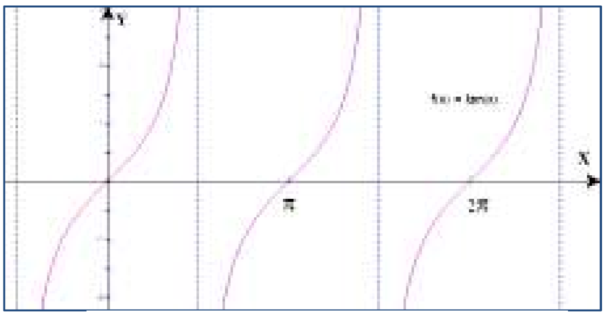
ฟังก์ชัน f มีลักษณะเป็นคาบ (Periodic) ถ้ามีจำนวน p ที่ไม่เป็นศูนย์ ซึ่งทำให้ $f(x+p)=f(x)$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในโดเมนของ f ค่าบวกที่เล็กที่สุดของ p (ถ้ามี) เป็นคาบ (Period) ของ f ฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ ซีแคนต์ และโคซีแคนต์ แต่ละฟังก์ชันมีคาบเป็น 2π สำหรับฟังก์ชันแทนเจนต์และโคแทนเจนต์มีคาบเป็น π ดังรูป



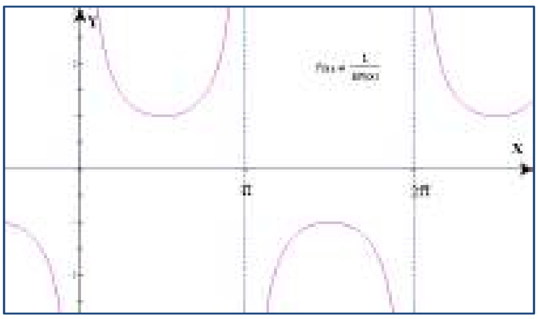
โดเมน: $(-\infty,\infty)$
เรนจ์: $[-1,1]$
คาบ: 2π



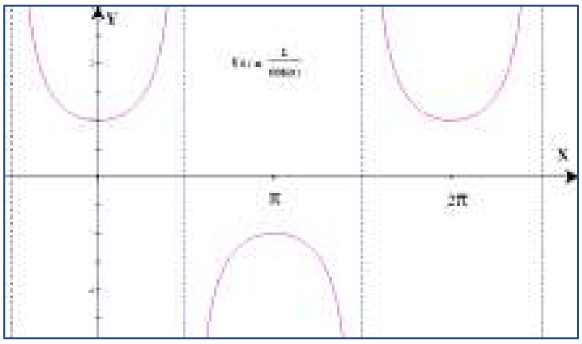
โดเมน: $(-\infty,\infty)$
เรนจ์: $[-1,1]$
คาบ: 2π

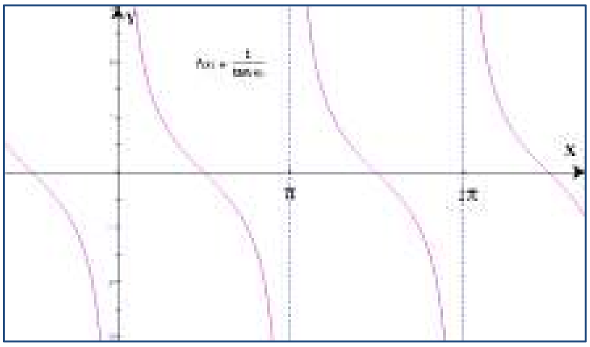


โดเมน: ทุก $x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$
เรนจ์: $(-\infty,\infty)$
คาบ: π



โดเมน: ทุก $x\neq n\pi$
เรนจ์: $(-\infty,-1]$ และ $[1,\infty)$
คาบ: 2π





โดเมน: $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$

เรนจ์: $(-\infty, -1]$ และ $[1, \infty)$

คาบ: 2π

โดเมน: ทุก $x \neq n\pi$

เรนจ์: $(-\infty, \infty)$

คาบ: π

แบบฝึกหัดบทที่ 2

1. จงแก้สมการเลขชี้กำลังต่อไปนี้

1.1 $2^x = 32$

1.2 $4^x = \frac{1}{16}$

1.3 $9^{2x-1} = \frac{1}{27}$

1.4 $3^{x+2} = 81$

1.5 $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

1.6 $3^{2x} - 3^{x+2} = 0$

2. จงหาค่าของลอการิทึมต่อไปนี้

2.1 $\log_2 1024$

2.2 $\log_3 729$

2.3 $\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{2401}$

2.4 $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log\frac{1}{2}}$

2.5 $(0.001)^{\log 7}$

2.6 $(\log_2 7 + \log_2 3) - \log_2 21$

2.7 $\log 99$

2.8 $\log 0.00093$

2.9 $\ln 0.00101$

2.10 $\ln 2030$

3. จงแก้สมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้

3.1 $\log_3 (x+8) - \log_3 x = 2$

3.2 $\log_5 x + \log_5 (x+4) = 1$

3.3 $\log x + \log(x+8) = \log(x+3) + \log(x+4)$

3.4 $\left(\log_2 x^2\right)\left(\log_3 2\right) = \log_5(x+2)\left(\log_3 5\right)$

3.5 จงแก้สมการ $2^{x+5} = 5$

3.6 จงแก้สมการ $4^{x} = 0.04$

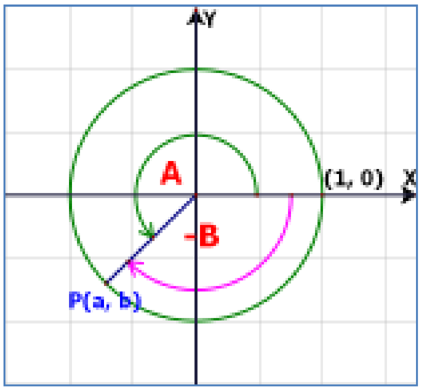
4. จงเปลี่ยน $35^\circ, 42^\circ$ และ 112° ให้มีหน่วยเป็นเรเดียน

5. จงเปลี่ยน $\frac{2\pi}{5}, \frac{13\pi}{10}$ และ $\frac{8\pi}{9}$ ให้มีหน่วยเป็นองศา

6. ให้ $0^\circ < \theta < 90^\circ$ จงหาค่าของ $\dfrac{\cos\theta + \cos(-\theta)}{2\cos\theta}$

7. ให้ $A > 0$ และ $B > 0$

จากรูปด้านขวามือ จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้



7.1 $\sin(A) - \sin(-B)$

7.2 $\cos(A) + \cos(-B)$

7.3 $\tan(A) - \cot(-B)$

7.4 $\sec(A) - \operatorname{cosec}(-B)$

8. จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

8.1 $\tan^2\frac{\pi}{3} + 2\tan^2\frac{\pi}{4}$

8.2 $2\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{4} - 3\sec^2\frac{\pi}{6}$

8.3 $\cot^2\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3} - \sin^2\frac{\pi}{3} - \frac{3}{4}\cot^2\frac{\pi}{3}$

8.4 $2\cot 45^\circ + \cos^3 60^\circ - 2\sin^4 60^\circ$

9. จงหาค่าของมุม $\cot\left(-300^\circ\right), \sec\left(\frac{-13\pi}{3}\right)$ และ $\tan 330^\circ$

10. รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้าน AB ยาว 5 หน่วย ด้าน BC ยาว3 หน่วย และขนาดของมุม B เท่ากับ 120° จงหาความยาวของด้าน C