บทที่ 3
เรขาคณิตวิเคราะห์

เรขาคณิตวิเคราะห์ (Analytic Geometry) เป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่งที่กล่าวถึงจุดบนระนาบ (point and plane) เรขาคณิตวิเคราะห์จึงแบ่งได้ดังนี้

1. ระบบพิกัดฉาก ประกอบด้วยเส้นตรงสองเส้น เส้นหนึ่งอยู่ในแนวนอน เรียกว่า แกน X อีกเส้นหนึ่งอยู่ในแนวตั้งเรียกว่าแกน Y ทั้งสองเส้นนี้ตัดกันเป็นมุมฉาก และเรียกจุดตัดว่า จุดกำเนิด (origin point) ซึ่งแบ่งเป็น 4 จตุภาค โดยที่ค่าของ (x,y) เป็นจำนวนจริง ซึ่งจตุภาคที่ I, II, III, IV เป็น $(+,+),(-,+)$, $(-,-)(+,-)$ ตามลำดับ

2. การหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด ถ้า $P_1(x_1,y_1)$ และ $P_2(x_2,y_2)$ เป็นจุด 2 จุดในระนาบ ระยะทางระหว่างจุด P_1 และจุด P_2 หาได้โดย

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

3. จุดกึ่งกลางระหว่างสองจุด ถ้า $P_1(x_1,y_1)$ และ $P_2(x_2,y_2)$ เป็นจุด 2 จุดในระนาบและให้ $M(x,y)$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด P_1 และจุด P_2 เราสามารถหาจุด M ได้ดังนี้

$$M(x,y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

4. ความชัน (Slope)
5. ระยะทางจากจุดไปยังเส้นตรง

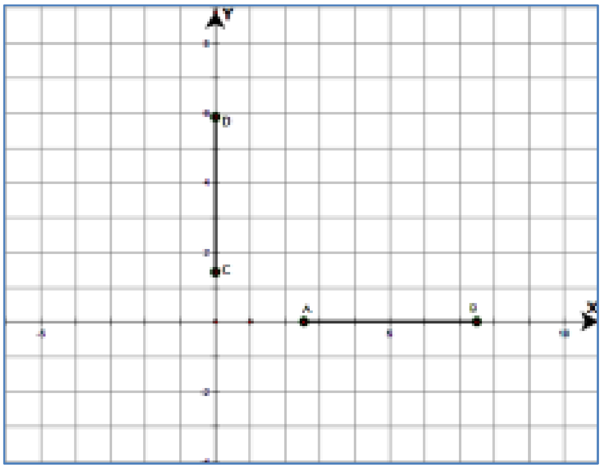
รายละเอียดของเนื้อหาจะได้ศึกษาดังจะกล่าวต่อไปนี้

3.1 เส้นตรงที่มีทิศทางและโปรเจคชัน

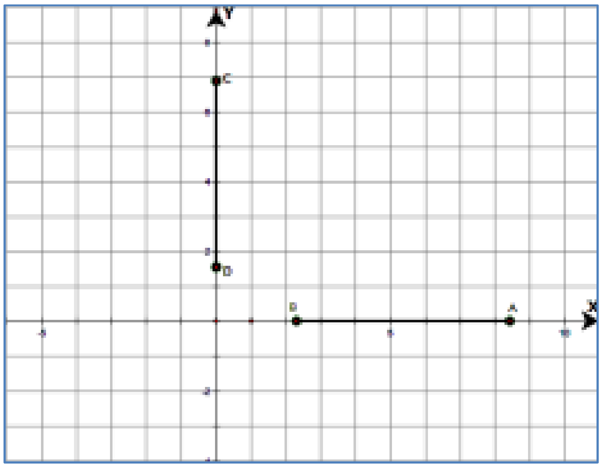
เส้นตรงที่มีทิศทาง (directed lines) หมายถึง เส้นตรงที่สามารถชี้บอกทิศทางที่เป็นบวกได้

บทนิยาม 3.1.1 ให้ $A(x_1,0)$ และ $B(x_2,0)$ เป็นจุดที่อยู่บนแกน X ระยะทางที่มีทิศทาง จาก A ไปยัง B ซึ่งเขียนแทนด้วย $\overline{AB}$ จะมีค่าเท่ากับ x_2-x_1

ให้ $C(0,y_1)$ และ $D(0,y_2)$ เป็นจุดที่อยู่บนแกน Y ระยะทางที่มีทิศทาง จาก C ไปยัง D ซึ่งเขียนแทนด้วย $\overline{CD}$ จะมีค่าเท่ากับ y_2-y_1



$\overline{AB} > 0$ และ $\overline{CD} > 0$



$\overline{AB} < 0$ และ $\overline{CD} < 0$

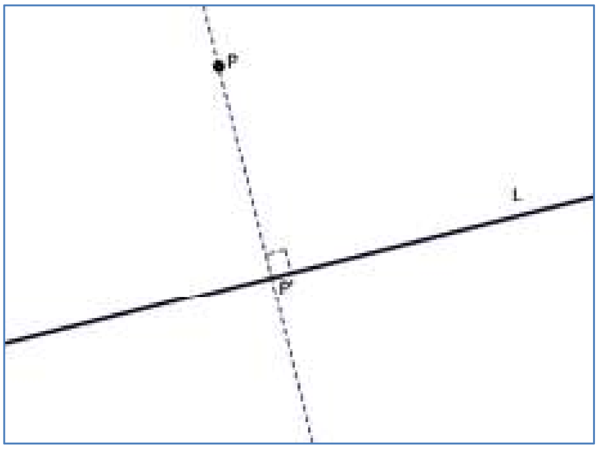
รูปที่ 3.1.1

บทนิยาม 3.1.2 ถ้า $A(x_1,0)$ และ $B(x_2,0)$ เป็นจุดที่อยู่บนแกน X ระยะทางที่ไม่มีทิศทาง (undirected distance) หรือระยะทาง (distance) ระหว่าง A และ B ซึ่งเขียนแทนด้วย $|AB|$ จะมีค่าเท่ากับ $|x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$

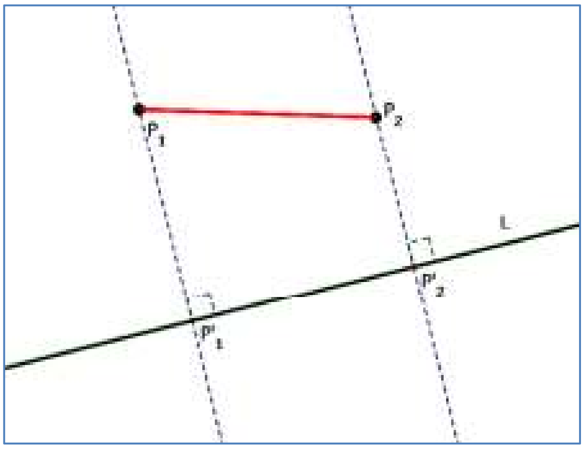
ถ้า $C(0,y_1)$ และ $D(0,y_2)$ เป็นจุดที่อยู่บนแกน Y ระยะทางที่ไม่มีทิศทาง (undirected distance) หรือระยะทาง (distance) ระหว่าง C และ D ซึ่งเขียนแทนด้วย $|CD|$ จะมีค่าเท่ากับ $|y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|$

บทนิยาม 3.1.3 ถ้าให้ P เป็นจุดใดๆ และ L เป็นเส้นตรงใดๆ ในระนาบ **ภาพฉาย (projection)** ของจุด P บนเส้นตรง L คือ จุดตัดของของเส้นตรง L กับเส้นตรงที่ลากผ่านจุด P ไปตั้งฉากกับเส้นตรง L เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathrm{Proj}_L P = P'$

บทนิยาม 3.1.4 ถ้าให้ PQ เป็นส่วนของเส้นตรงใดๆ และ L เป็นเส้นตรงใดๆ ในระนาบ **ภาพฉาย (projection)** ของส่วนของเส้นตรง PQ บนเส้นตรง L คือ ส่วนของเส้นตรง $P'Q'$ เมื่อ P' และ Q' เป็นภาพฉายของจุด P และ Q บนเส้นตรง L ตามลำดับ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathrm{Proj}_L PQ = P'Q'$

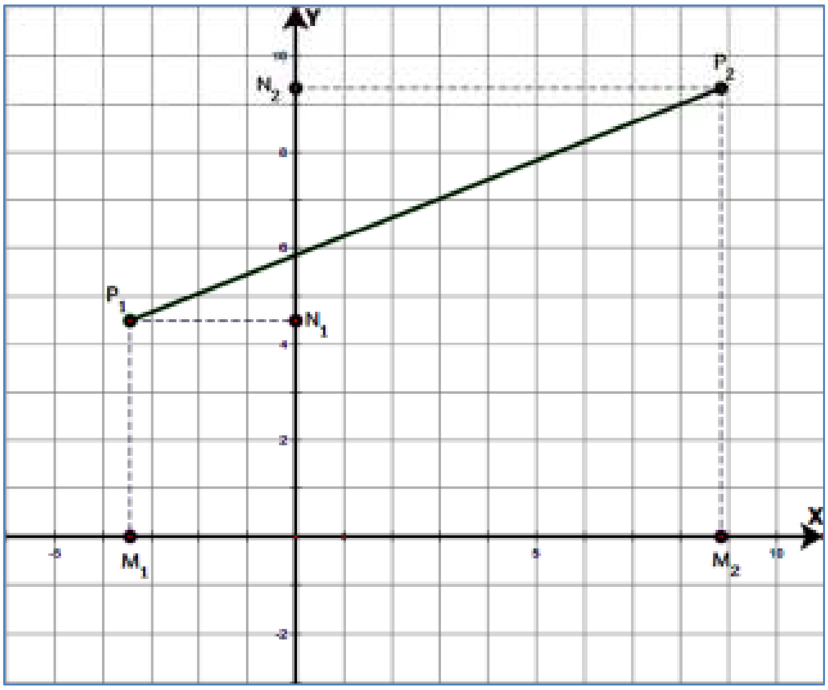


$\operatorname{Pr}oj_L P = P'$



$\operatorname{Pr}oj_L P_1P_2 = P_1'P_2'$

รูปที่ 3.1.2



รูปที่ 3.1.3

ถ้าให้ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดใดๆ บนระนาบ ใช้สัญลักษณ์ $\operatorname{Pr}oj_X P_1$ และ $\operatorname{Pr}oj_Y P_1$ แทนโปรเจคชันของ P_1 บนแกน X และ Y ตามลำดับ เพราะฉะนั้น พิจารณาจากรูป จะได้ว่า

$$\operatorname{Pr}oj_X P_1 = M_1(x_1, 0)$$

$$\operatorname{Pr}oj_Y P_1 = N_1(0, y_1)$$

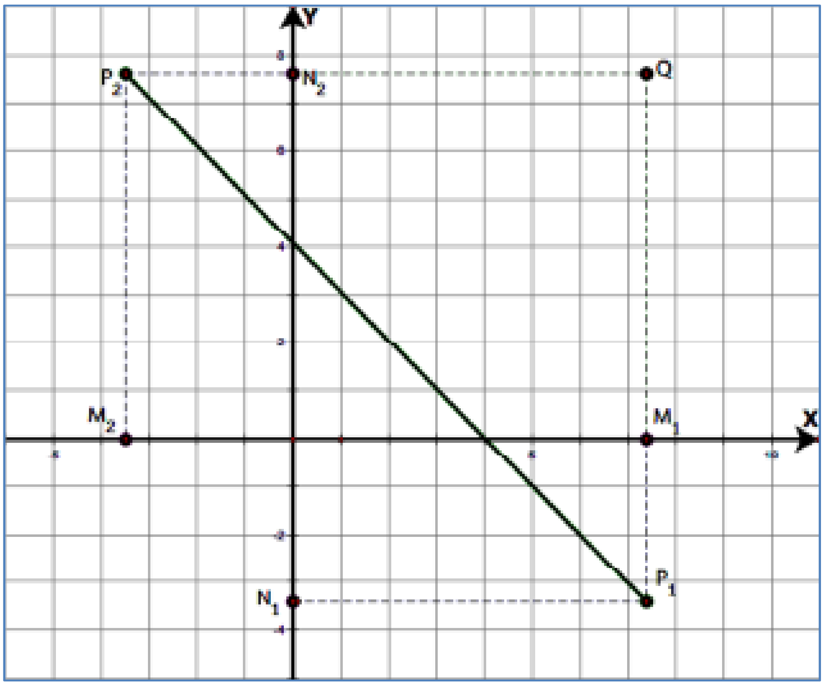
และจะได้ว่า $$\operatorname{Pr}oj_X P_2 = M_2(x_2, 0)$$

$$\Pr oj_Y P_2 = N_2(0, y_2)$$

เพราะฉะนั้น ความยาวของ $\Pr oj_X P_1 P_2 = |M_1 M_2| = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$ และความยาวของ $\Pr oj_y P_1 P_2 = |N_1 N_2| = |y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|$

3.2 ระยะระหว่างจุดสองจุด

ถ้าให้ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดใดๆ บนระนาบ ดังรูป



รูปที่ 3.2.1

จากหัวข้อที่ผ่านมา จะได้ว่า

$$|P_1 Q| = \text{ความยาวของ } \Pr oj_X P_1 P_2 = |x_2 - x_1|$$

และ $$|P_2 Q| = \text{ความยาวของ } \Pr oj_y P_1 P_2 = |y_2 - y_1|$$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส (Pythagoras' Theorem) จะได้ว่า

$$|P_1 P_2|^2 = |P_1 Q|^2 + |P_2 Q|^2$$

$$= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

หรือ $$|P_1 P_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$|P_1 P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

เพราะฉะนั้นระยะทางระหว่างจุด P_1P_2 คือ

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ทฤษฎีบท 3.1.1 ให้ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดใดๆ บนระนาบพิกัดฉาก จะได้ระยะทางระหว่างจุด P_1 และ P_2 มีค่าเท่ากับ

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ตัวอย่าง 3.2.1 จงหาระยะทางระหว่างจุด $A(-4,3)$ และ $B(2,5)$

วิธีทำ กำหนดให้ $(x_1, y_1) = (-4,3)$

$(x_2, y_2) = (2,5)$

เพราะฉะนั้น

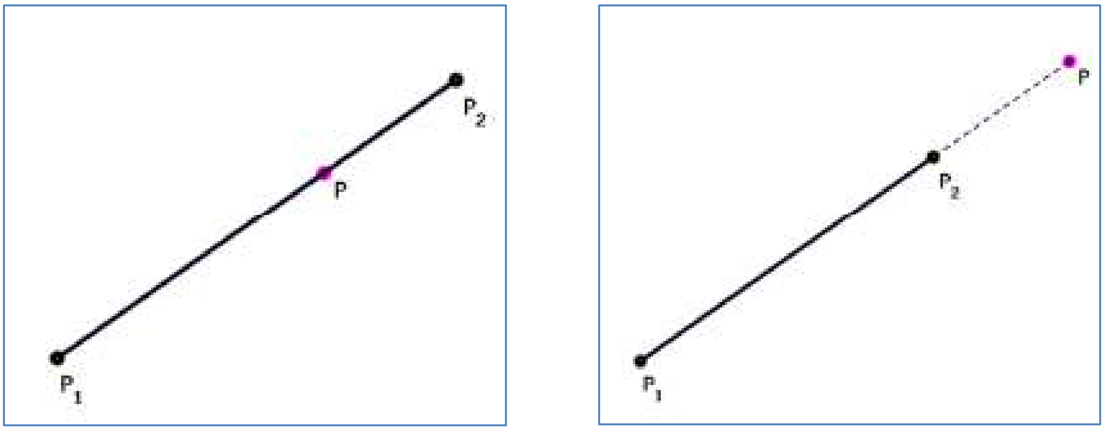
$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(2-(-4))^2 + (5-3)^2} \\ &= \sqrt{6^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{36+4} \\ &= \sqrt{40} \\ &= 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

นั่นคือ ระยะทางระหว่างจุด A และ B เท่ากับ $2\sqrt{10}$ หน่วย

□

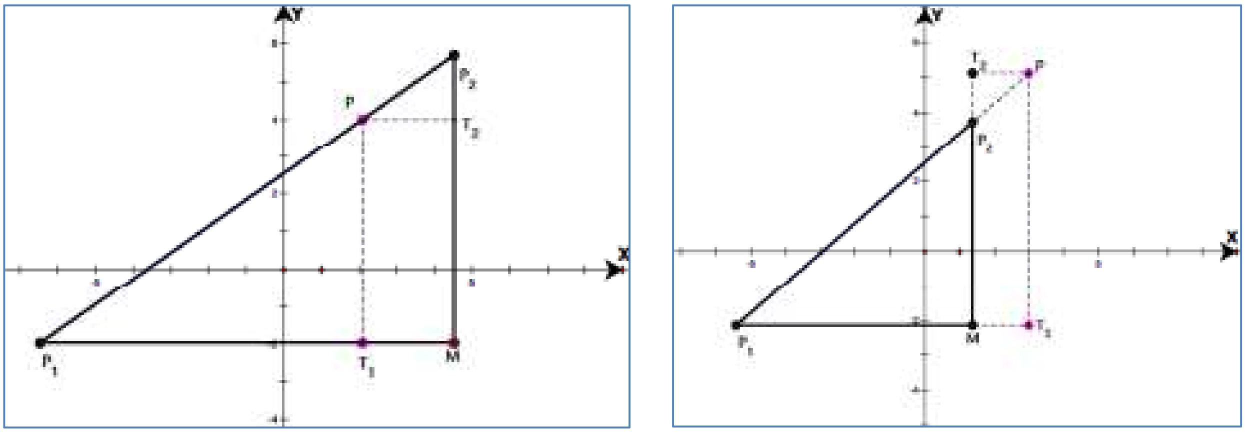
3.3 จุดแบ่งและจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง

ถ้าให้ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดใดๆ บนระนาบพิกัดฉาก และเป็นจุดปลายของส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุด P_1 และ P_2 โดยแบ่งส่วนของเส้นตรง P_1P_2 ออกเป็นอัตราส่วน $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ เรียก r ว่า **อัตราส่วนของการแบ่ง (ratio of division)**



$$r=\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}>0 \qquad r=\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}<0$$

รูปที่ 3.3.1



รูปที่ 3.3.2

จากรูปที่ 3.3.2 และจากสามเหลี่ยมคล้าย P_1T_1P และ PT_2P_2 จะได้ว่า

$$r=\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{P_1T_1}{PT_2}$$

เพราะว่า $P_1T_1=x-x_1$ และ $PT_2=x_2-x$ เพราะฉะนั้น

$$r=\frac{x-x_1}{x_2-x} \text{ หรือ } x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}$$

ในทำนองเดียวกัน จากสามเหลี่ยมคล้าย P_1T_1P และ PT_2P_2 จะได้ว่า

$$r=\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}=\frac{\overline{P_1T_1}}{PT_2}$$

เพราะว่า $T_1P=y-y_1$ และ $T_2P_2=y_2-y$ เพราะฉะนั้น

$$r=\frac{y-y_1}{y_2-y} \text{ หรือ } y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$$

ในกรณีที่ P เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง P_1P_2 จะได้

$$r=\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}=1$$

ดังนั้น จะได้ว่า $x=\frac{1}{2}\left(x_1+x_2\right)$ และ $y=\frac{1}{2}\left(y_1+y_2\right)$

ตัวอย่าง 3.3.1 จงหาพิกัดของจุด P ที่แบ่งส่วนของเส้นตรงจากจุด $P_1\left(-3,-1\right)$ ไปยังจุด $P_2\left(6,2\right)$ ออกเป็นอัตราส่วน $\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}=-\frac{5}{2}$

วิธีทำ เพราะว่า $r=\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}=-\frac{5}{2}$ แสดงว่าจุด $P\left(x,y\right)$ จะต้องอยู่ภายนอกส่วนของเส้นตรง P_1P_2 ออกไปทางด้านจุด P_2 ดังนั้นจากสูตร จะได้ว่า

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}=\frac{-3+\left(-\frac{5}{2}\right)(6)}{1+\left(-\frac{5}{2}\right)}=\frac{-3-15}{-\frac{3}{2}}=12$$

และ

$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}=\frac{\left(-1\right)+\left(-\frac{5}{2}\right)(2)}{1+\left(-\frac{5}{2}\right)}=\frac{-1-5}{-\frac{3}{2}}=4$$

นั่นคือ พิกัดของจุด P คือ $\left(12,4\right)$

□

ตัวอย่าง 3.3.2 จงหาพิกัดของจุดกึงกลางของด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมที่มีจุดมุมอยู่ที่จุด $A\left(-3,6\right)$, $B\left(-3,2\right),C\left(1,4\right)$

วิธีทำ สมมุติให้จุดกึ่งกลางของด้าน AB,BC และ CA คือ จุด D,E และ F ตามลำดับ

จากสูตร จะได้

พิกัดของจุด D คือ $\left(x_1,y_1\right)$ โดยที่

$$x_1=\frac{1}{2}\left(-3-3\right)=-3$$

$$y_1=\frac{1}{2}\left(6+2\right)=4$$

พิกัดของจุด E คือ $\left(x_2,y_2\right)$ โดยที่

$$x_2 = \frac{1}{2}(-3+1) = -1$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(2-4) = -1$$

พิกัดของจุด F คือ (x_3, y_3) โดยที่

$$x_3 = \frac{1}{2}(-3+1) = -1$$

$$y_3 = \frac{1}{2}(6-4) = 1$$

นั่นคือ พิกัดของจุด D, E และ F คือ $(-3,4), (-1,-1)$ และ $(-1,1)$ ตามลำดับ

□

3.4 ความชันของเส้นตรง

บทนิยาม 3.4.1 มุมเอียง (angle of inclination) ของเส้นตรง L เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ α อ่านว่า แอลฟา (alpha) หมายถึง มุมบวก (คือมุมที่วัดทวนเข็มนาฬิกา) ที่เล็กที่สุด ที่วัดจากแกน X ทางด้านบวกไปยังเส้นตรง L ในกรณีที่ L ขนานกับแกน X เราจะได้ $\alpha = 0$

บทนิยาม 3.4.2 ความชัน (slope) ของเส้นตรง L (ในที่นี้เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ m) ที่มีมุมเอียง α คือ จำนวนที่มีค่า เท่ากับ $\tan\alpha$ นั่นคือ

$$m = \tan\alpha$$

ทฤษฎีบท 3.4.1 ถ้า L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$ จะได้ว่า

ความชันของ $L = m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ตัวอย่าง 3.4.1 จงหาความชันและมุมเอียงของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(2,1)$ และ $P_2(4,3)$

วิธีทำ ให้ $(x_1, y_1) = (2,1)$ และ $(x_2, y_2) = (4,3)$

จากทฤษฎีบท 3.4.1 จะได้ว่า

ความชันของเส้นตรง L ที่ผ่านจุด P_1 และ P_2 คือ

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{4-2} = 1$$

จาก $m = \tan\alpha = 1$ และเพราะว่า $0 \leq \alpha < 180$ จะได้ว่า $\alpha = 45^\circ$

นั่นคือ ความชันของเส้นตรง L ที่ผ่านจุด P_1 และ P_2 เท่ากับ 1 และมุมเอียง เท่ากับ 45°

□

3.5 เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก

บทนิยาม 3.5.1 .ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่มีมุมเอียง α_1 และ α_2 ตามลำดับ ถ้า $\alpha_1 = \alpha_2$ เราจะกล่าวว่า เส้นตรง ว่า L_1 ขนานกับ L_2 (แทนด้วยสัญลักษณ์ $L_1 \parallel L_2$)

ทฤษฎีบท 3.5.1 ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่มีมุมเอียง α_1 และ α_2 ตามลำดับ และมีความชัน m_1 และ m_2 ตามลำดับ

(i) ถ้า $m_1 = m_2$ จะได้ว่า L_1 ขนานกับ L_2

(ii) ถ้า L_1 ขนานกับ L_2 จะได้ว่า $m_1 = m_2$

บทนิยาม 3.5.2 .ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่มีมุมเอียง α_1 และ α_2 ตามลำดับ ถ้า $\alpha_1 = \alpha_2$ (หรือ $m_1 = m_2$ โดยที่ ความชัน m_1 และ m_2 เป็นความชันของ L_1 และ L_2 ตามลำดับ) เราจะกล่าวว่า เส้นตรง L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงเดียวกัน

ทฤษฎีบท 3.5.2 ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่มีความชัน m_1 และ m_2 ตามลำดับ ถ้า $m_1 \cdot m_2 = -1$ แล้ว L_1 ตั้งฉาก L_2(แทนด้วยสัญลักษณ์ $L_1 \perp L_2$)

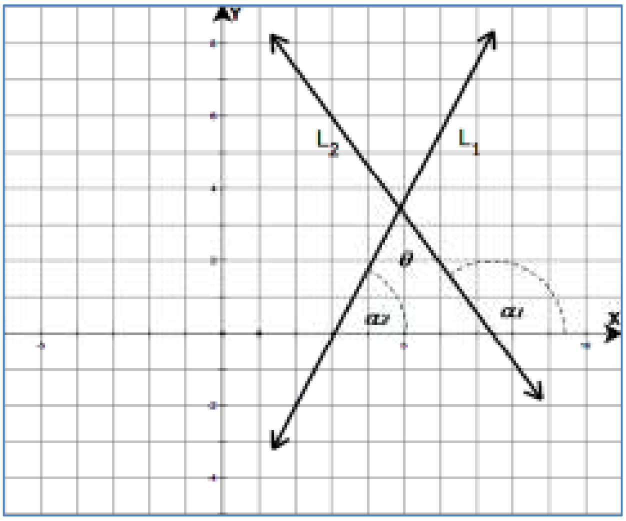
3.6 มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น

บทนิยาม 3.6.1 .ให้ L_1 และ L_2 ที่ไม่ขนานกันและตัดกันที่จุด P มุมบวกที่จุด P โดยวัดจาก L_1 ไปยัง L_2 เราเรียกว่า มุมจาก L_1 ไปยัง L_2 (angle from L_1 to L_2)

มุมที่จุด P หมายถึง มุมที่มีจุดมุมอยู่ที่จุด P และวัดโดยมีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ถ้าให้ θ เป็นมุมจาก L_1 ไปยัง L_2 จะได้ว่า $\pi-\theta$ เป็นมุมจาก L_2 ไปยัง L_1

สมมติให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่ตัดกัน แต่ไม่ตั้งฉากกัน และไม่มีเส้นใดที่ขนานกับแกน Y ให้ α_1 และ α_2 แทนมุมเอียง และ m_1, m_2 เป็นความชันของ L_1 และ L_2 ตามลำดับ ให้ θ เป็นมุมฉากจาก L_1 ไปยัง L_2 เราจะพิจารณามุมระหว่างเส้นตรงสองเส้นนี้ 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 $\alpha_1<\alpha_2$ พิจารณาดังรูป 3.6.1



รูปที่ 3.6.1

จากรูป 3.6.1 พบว่า $\alpha_2=\alpha_1+\theta$

$$\theta=\alpha_2-\alpha_1$$

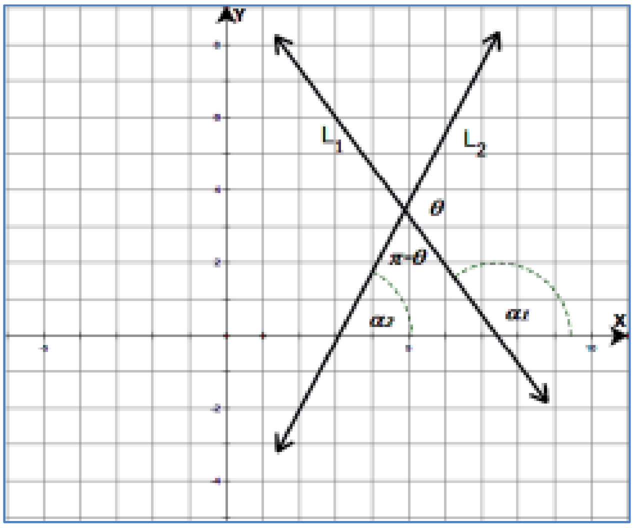
จะได้ว่า $\tan\theta=\tan\left(\alpha_2-\alpha_1\right)$

จากเอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ จะได้

$$\tan\theta=\frac{\tan\alpha_2-\tan\alpha_1}{1+\tan\alpha_2\cdot\tan\alpha_1}$$

นั่นคือ $\tan\theta=\dfrac{m_2-m_1}{1+m_2\cdot m_1}$ และสามารถหาคำตอบของ θ ได้โดยใช้อินเวอร์สของฟังก์ชันแทนเจนต์

กรณีที่ 2 $\alpha_2<\alpha_1$ พิจารณาดังรูป 3.6.2



รูปที่ 3.6.2

จากรูป 3.6.2 พบว่า $\alpha_1 = \alpha_2 + (\pi - \theta)$

$$\pi - \theta = \alpha_1 - \alpha_2$$

จะได้ว่า $\tan(\pi - \theta) = \tan(\alpha_1 - \alpha_2)$

จากเอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ จะได้ว่า

$$-\tan\theta = \frac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1 + \tan\alpha_1 \cdot \tan\alpha_2}$$

$$-\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

ดังนั้น $\tan\theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$ หรือถ้า β แทนมุมจาก L_2 ไปยัง L_1 จะได้ $\beta = \pi - \theta$

นั่นคือ $\tan\beta = \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta = -\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$

ตัวอย่าง 3.6.1 จงหาแทนเจนต์ (tangent) ของมุมจากเส้นตรง L_1 ที่ผ่านจุด $(0,0)$ และ $(\sqrt{3},1)$ ไปยังเส้นตรง L_2 ที่ผ่านจุด $(0,0)$ และ $(-2,-2\sqrt{3})$

วิธีทำ ให้ m_1, m_2 เป็นความชันของ L_1 และ L_2 ตามลำดับ ให้ θ เป็นมุมฉากจาก L_1 ไปยัง L_2

จากโจทย์จะได้ $m_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ และ $m_2 = \sqrt{3}$

ดังนั้น $\tan\theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$

$$=\frac{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\frac{3-1}{\sqrt{3}}}{1+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

นั่นคือ ค่าของแทนเจนต์ (tangent) ของมุมจากเส้นตรง L_1 ไปยังเส้นตรง L_2 ที่กำหนดให้ เท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

□

3.7 สมการของเส้นตรง

3.7.1 สมการในแบบ จุด-ความชัน (The point-Slope Equation)

ถ้า L เป็นเส้นตรงที่มีความชัน m และผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ เพราะฉะนั้นสิ่งที่ทราบคือ จุดใดๆ บนเส้นตรงเพียง 1 จุด และความชันของเส้นตรง L

นั่นคือ สมการของเส้นตรง L เขียนอยู่ในรูป $y-y_1=m(x-x_1)$

ตัวอย่าง 3.7.1 จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2,-3)$ และมีความชัน เท่ากับ $-\frac{4}{5}$

วิธีทำ กำหนดให้ $(x_1, y_1)=(2,-3)$ และ $m=-\frac{4}{5}$

จะได้สมการเส้นตรงดังนี้

$$y-(-3)=-\frac{4}{5}(x-2)$$

$$y+3=-\frac{4}{5}(x-2)$$

$$5y+15=-4(x-2)$$

$$5y+15=-4x+8$$

$$4x+5y+7=0$$

นั่นคือ $4x+5y+7=0$ เป็นสมการเส้นตรงที่ต้องการ

□

3.7.2 สมการในแบบ จุดสองจุด (The Two-point Equation)

ถ้า L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1,y_1)$ และ $P_2(x_2,y_2)$เพราะฉะนั้นสิ่งที่ทราบคือ จุดใดๆ 2 จุดบนเส้นตรง L

นั่นคือ สมการของเส้นตรง L เขียนอยู่ในรูป $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

ตัวอย่าง 3.7.2 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2,3)$ และ $(1,-4)$

วิธีทำ กำหนดให้ $(x_1,y_1)=(-2,3)$ และ $(x_2,y_2)=(1,-4)$

จะได้ว่า

$$y-3=\frac{-4-3}{1+2}(x+2)$$

$$=\frac{-7}{3}(x+2)$$

$$3(y-3)=-7(x+2)$$

$$7x+3y+5=0$$

นั่นคือ $7x+3y+5=0$ เป็นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด 2 จุดที่กำหนดให้

□

3.7.3 สมการในแบบความชัน-จุดตัดแกน (The Slope-Intercept Equation)

ถ้า L เป็นเส้นตรงที่มีความชัน เท่ากับ mและตัดแกน Y ที่จุด $(0,b)$ เพราะฉะนั้นสิ่งที่ทราบคือ ความชันของเส้นตรง L และจุดตัดแกน Y

นั่นคือ สมการของเส้นตรง L เขียนอยู่ในรูป $y=mx+b$

ตัวอย่าง 3.7.3 จงหาสมการและวาดรูปเส้นตรงที่มีจุดตัดแกน Y ที่จุด $(0,3)$ และมีความชัน เท่ากับ $-\dfrac{2}{3}$

วิธีทำ กำหนดให้ $b=3$ และ $m=-\dfrac{2}{3}$

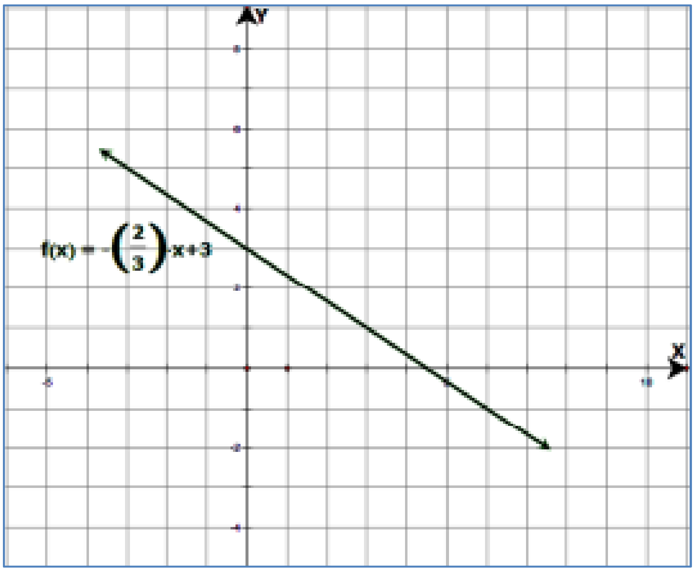
จะได้ว่า

$$y=-\frac{2}{3}x+3$$

$$3y=-2x+9$$

$$2x+3y-9=0$$

สมารถเขียนกราฟของสมการเส้นตรง ดังนี้



นั่นคือ $2x+3y-9=0$ เป็นสมการเส้นตรงที่ต้องการ

□

3.7.4 สมการในแบบจุดตัดแกน (The Intercept Equation)

ถ้า L เป็นเส้นตรงที่มีจุดตัดแกน X ที่จุด $(a,0)$ และจุดตัดแกน Y ที่จุด $(0,b)$ เพราะฉะนั้นสิ่งที่ทราบคือ จุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y

นั่นคือ สมการของเส้นตรง L เขียนอยู่ในรูป $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

ตัวอย่าง 3.7.3 จงหาสมการเส้นตรงที่มีจุดตัดแกน X ที่จุด $(-5,0)$ และจุดตัดแกน Y ที่จุด $(0,2)$

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ $a=-5$ และ $b=2$

จะได้ว่า

$$-\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1$$
$$-2x+5y=10$$
$$-2x+5y-10=0$$
$$2x-5y+10=0$$

นั่นคือ $2x-5y+10=0$ เป็นสมการที่ต้องการ

□

บทนิยาม 3.7.1 .สมการที่อยู่ในรูป $Ax+By+C=0$ โดยที่ A,B และ C เป็นจำนวนจริงใดๆ และ A,B จะเท่ากับศูนย์ทั้งสองตัวไม่ได้ จะเรียกว่าเป็นสมการกำลังหนึ่ง (first degree equation) หรือสมการเชิงเส้น (linear equation) ของตัวแปร x และ y

ทฤษฎีบท 3.7.1 เส้นตรงทุกเส้นในระนาบพิกัดฉากจะต้องมีสมการในแบบสมการเชิงเส้นของสองตัวแปร

ทฤษฎีบท 3.7.2 กราฟของสมการเชิงเส้น $Ax+By+C=0$ โดยที่ A,B จะเท่ากับศูนย์ทั้งสองตัวไม่ได้ จะเป็นเส้นตรงในระนาบพิกัดฉาก

ตัวอย่าง 3.7.4 จงหาสมการของเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งได้ฉากกับส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายอยู่ที่ $P(2,-3)$ และ $Q(-4,5)$

วิธีทำ ความชันของส่วนของเส้นตรง PQ คือ

$$m=\frac{5+3}{-4-2}=-\frac{4}{3}$$

จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง PQ อยู่ที่ (x_1,y_1) โดยที่

$$x_1=\frac{2-4}{2}=-1 \text{ และ } y_1=\frac{-3+5}{2}=1$$

ดังนั้นความชันของเส้นตรงที่ตั้งได้ฉากกับส่วนของเส้นตรง PQ คือ $m_2=-\frac{1}{m_1}=\frac{3}{4}$

จากสมการในรูปแบบจุด-ความชัน จะได้สมการเส้นตรงที่ต้องการ ดังนี้

$$y-1=\left(\frac{3}{4}\right)(x+1)$$

$$4y-4=3x+3$$

$$3x-4y+7=0$$

นั่นคือ $3x-4y+7=0$ เป็นสมการเส้นตรงที่ต้องการ

□

3.8 ระยะทางระหว่างจุดและเส้นตรง (Distance between a Point and a Line)

ให้ L เป็นเส้นตรงใดๆ ในระนาบพิกัดฉาก เพราะฉะนั้น จะต้องขนานกับแกน X หรือแกน Y หรือไม่ขนานแกน X และแกน Y

ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดใดๆ นอกเส้นตรง L และให้ d เป็นระยะทางระหว่างจุด P และเส้นตรง L ณ จุด Q ซึ่งเป็นโปรเจคชันของจุด P บนเส้นตรง L

กรณีที่ 1 ถ้า L ขนานกับแกน Y

สมมติให้ สมการของ L คือ $x=a$ เพราะฉะนั้น พิกัดของ Q คือ (a,y_1)

จะได้ว่า

$$d=\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-y_1)^2}$$

$$=|x_1-a|$$

กรณีที่ 2 ถ้า L ขนานกับแกน X

สมมติให้ สมการของ L คือ $y=b$ เพราะฉะนั้น พิกัดของ Q คือ (x_1,b)

จะได้ว่า

$$d=\sqrt{(x_1-x_1)^2+(y_1-b)^2}$$
$$=|y_1-b|$$

กรณีที่ 3 ถ้า L ขนานกับทั้งแกน X และแกน Y

สมมติให้ สมการของ L คือ $Ax+By+C=0; A\neq 0, B\neq 0$

จากสมการของ L จะได้ว่า

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

แสดงว่าความชันของ $L=-\frac{A}{B}$

ทฤษฎีบท 3.8.1 ระยะทาง d ระหว่าง $P(x_1,y_1)$ และเส้นตรง L ที่มีสมการ $Ax+By+C=0$ มีค่าเท่ากับ

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

ตัวอย่าง 3.8.1 จงหาระยะทางระหว่างจุด $P(-1,3)$ and เส้นตรง $L:3x-4y=10$

วิธีทำ เขียนสมการเส้นตรงให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน

จากสมการเส้นตรงที่กำหนดให้ คือ $3x-4y=10$

จะได้ว่า

$$3x-4y-10=0$$

จากทฤษฎีบท 3.8.1

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

ซึ่ง $A=3, B=-4, C=-10, x_1=-1$ และ $y_1=3$

จะได้ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรงที่กำหนดให้เป็นดังนี้

$$d=\frac{|(3)(-1)+(-4)(3)+(-10)|}{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}}$$

$$= \frac{\left|-3-12-10\right|}{\sqrt{9+16}}$$

$$= \frac{\left|-35\right|}{\sqrt{25}}$$

$$= \frac{35}{5}$$

$$= 7$$

นั่นคือ ระยะทางระหว่างจุด P กับเส้นตรง L ที่กำหนดให้ คือ 7 หน่วย

□

ตัวอย่าง 3.8.2 จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่มีสมการ $2x+3y=5$ และ $y=-\frac{2}{3}x+2$

วิธีทำ เนื่องจากสมการ $y=-\frac{2}{3}x+2$ อยู่ในรูปแบบ ความชัน – จุดตัดแกน Y

ดังนั้นจึงทราบค่าจุดตัดแกน Y คือ $\left(0,2\right)$ ซึ่งเป็นค่าของ x_1 และ y_1

และเนื่องจากสมการ $2x+3y=5$ จัดให้อยู่ในรูปมาตรฐาน ได้ดังนี้

$$2x+3y-5=0$$

จะได้ว่า

$$d = \frac{\left|\left(2\right)\left(0\right)+\left(3\right)\left(2\right)+\left(-5\right)\right|}{\sqrt{\left(2\right)^2+\left(3\right)^2}}$$

$$= \frac{\left|6-5\right|}{\sqrt{4+9}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$\approx 0.28$$

นั่นคือ ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่กำหนดให้ประมาณ 0.28 หน่วย

□

ถ้าหากทราบว่าเส้นตรง 2 เส้นนั้นขนานกันก็สามารถที่จะใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้ในการหาระยะทางระหว่างเส้นตรง 2 เส้นนั้นได้

ทฤษฎีบท 3.8.2 ถ้าเส้นตรง $L_1 :\ Ax+By+C_1=0$ และเส้นตรง $L_2 : Ax+By+C_2=0$ เป็นเส้นตรงที่ขนานกัน แล้วจะได้ว่า ระยะทางระว่างเส้นตรง L_1 และ L_2 มีค่าเท่ากับ

$$d=\frac{\left|C_1-C_2\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

เราทราบแล้วว่าเส้นตรง 2 เส้นขนานกันก็ต่อเมื่อความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากัน จากทฤษฎีบท 3.8.2 จะสังเกตเห็นว่าความชันของเส้นตรง L_1 และ L_2 มีค่าเท่ากัน คือ $-\frac{A}{B}$ เพื่อให้เข้าใจมากขึ้นลองมาศึกษาตัวอย่าง 3.8.3 ต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.8.3 จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง $L_1 : 2x+3y=5$ และ $L_2 : 14x+21y=10$

วิธีทำ เนื่องจาก เส้นตรง L_1 และ L_2 มีความชันเท่ากัน คือ $-\frac{2}{3}$

แต่สัมประสิทธิ์ของตัวแปร x และ y ไม่เท่ากัน

ดังนั้นต้องทำสัมประสิทธิ์ให้เท่ากัน โดยคูณด้วย 7 ในสมการเส้นตรง L_1

จะได้ $14x+21y=35$

จัดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน จะได้

$L_1 : 14x+21y-35=0$ และ $L_2 : 14x+21y-10=0$

จะได้ $C_1=-35$ และ $C_2=-10$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} d &= \frac{\left|-31+10\right|}{\sqrt{(14)^2+(21)^2}} \\ &= \frac{21}{\sqrt{196+441}} \\ &= \frac{21}{\sqrt{637}} \\ &= \frac{21}{7\sqrt{13}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{13}} \\ &\approx 0.83 \end{aligned}$$

นั่นคือ ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่กำหนดให้ประมาณ 0.83 หน่วย

แบบฝึกหัดบทที่ 3

1. จงหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุด

   1.1 (1,-2) และ (4,2)

   1.2 (-3,9) และ (5,-3)

   1.3 (-2,-8) และ (4,3)

2. จงหาความชันและความเอียงของเส้นตรงที่ผ่านจุด 2 จุด ต่อไปนี้

   2.1 (2,3) กับ (5,7)

   2.2 (1.5,3.5) กับ (5.0,-4.5)

   2.3 (-2,-2) กับ (4,-4)

3. จงหาสมการเส้นตรง ที่มีเงื่อนไขตามที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   3.1 มีความชัน 2 มีส่วนตัดแกน Y เป็น 4

   3.2 ผ่านจุด (1,2) และมีความชัน 3

   3.3 มีส่วนตัดแกน X เป็น 2 และมีส่วนตัดแกน Y เป็น 6

   3.4 ผ่านจุด (4,1) และ (7,4)

4. จงหาความชันของเส้นตรงที่มีสมการเป็น $x + 2ky - 1 = 0$ และเส้นตรงมีผลต่างของส่วนตัดแกน X กับส่วนตัดแกน Y เท่ากับ 3

5. จงหาส่วนตัดแกน X และส่วนตัดแกน Y ของเส้นตรงที่ผ่านจุด (-2,4) กับ (5,-1)

6. จงพิจารณาว่าเส้นตรงคู่ใดขนานกัน เส้นตรงคู่ใดตั้งฉากกัน

   $l_1 : 2x - 4y - 1 = 0$

   $l_2 : 7x + y + 1 = 0$

   $l_3 : 4x + 2y + 5 = 0$

   $l_4 : x - 7y - 9 = 0$

   $l_5 : 2x + 4y - 7 = 0$

   $l_6 : 2x - 14y + 5 = 0$

   $l_7 : x - 2y + 8 = 0$

   $l_8 : 21x + 3y + 1 = 0$

7. จงหาระยะทางระหว่างจุด (-2,4) กับ (1,-3)

8. จงหาระยะทางระหว่างจุด (-2,5) กับเส้นตรง $l : 4x + 3y + 1 = 0$

9. จงหาระยะทางระหว่างเส้นขนาน $l_1 : 5x - 12y + 1 = 0$ กับ $l_2 : 10x - 24y + 1 = 0$